1 Esercizi sugli integrali tripli

Esercizio 1.
Calcolare

$$\int_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dydz$$

dove $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\,0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$.
Soluzione. *Integrazione per fili.* La proiezione di A sul piano $z=0$ e'

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,x^2+y^2\le 1\}=E_1\cup E_2,$$

$$E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,x^2+y^2\le 1/2\};\;\; E_2\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,1/2\le x^2+y^2\le 1\}.$$

$$\begin{aligned}&\int_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dydz\\ &=\int_{E_1} dxdy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz+\int_{E_2} dxdy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz\\ &=....=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4}{3}\rho^4 d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/\sqrt{2}}^1\big(\rho^2\sqrt{1-\rho^2}+\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\big)\rho d\rho=\frac{\sqrt{2}}{5}\pi.\end{aligned}$$

Integrazione per strati. La proiezione di A sull'asse z e' $[0,\sqrt{2}/2]$ (la sfera e il cono si incontrano alla quota $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$).
La sezione orizzontale a quota z e'

$$A_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,z^2\le x^2+y^2\le 1-z^2\}.$$

$$\begin{aligned}&\int_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dydz\\ &=\int_0^{\sqrt{2}/2}dz\int_{A_z}(x^2+y^2+z^2)dxdy\\ &=\int_0^{\sqrt{2}/2}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_z^{\sqrt{1-z^2}}(\rho^2+z^2)\rho\,d\rho=\frac{\sqrt{2}}{5}\pi.\end{aligned}$$

Coordinate sferiche.

$$\int_A (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dydz=\int_{A'}\rho^2\,\boldsymbol{\rho^2}\sin\theta\,d\rho d\theta d\phi,$$

$$con\;\; A'=\{(\rho,\theta,\phi):\;\rho\in[0,1],\,\theta\in[\pi/4,\pi/2],\;\phi\in[0,2\pi]\}.$$

$$\int_{A'}\rho^2\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^1\rho^4\,d\rho=\frac{\sqrt{2}}{5}\pi.$$

Esercizio 2.
Calcolare il volume del solido

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2-2y\le 0,\;0\le z\le 10-3\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Soluzione. *Integrazione per fili.*

La proiezione di A sul piano $z = 0$ e'

$$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \le 0\}.$$

$$\begin{aligned}
Vol(A) &= \int_A dx\, dydz = \int_E dxdy \int_0^{10-3\sqrt{x^2+y^2}} dz \\
&= \int_E (10 - 3\sqrt{x^2 + y^2})dxdy = 10\,\mathrm{area}(E) - \int_E 3\sqrt{x^2 + y^2}dxdy \\
&= 10\,\mathrm{area}(E) - 3\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^2 d\rho = 10\pi - \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.

Calcolare

$$\int_A (x^2 + y^2)^4\, dx\, dydz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \le 5 - x^2 - y^2, \ \ 2 \le z \le 4\}$.

Soluzione.

Integrazione per strati. La proiezione di A sull'asse z e' $[2, 4]$.

La sezione orizzontale a quota z e'

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 5 - z\}.$$

$$\begin{aligned}
&\int_A (x^2 + y^2)^4\, dx\, dydz \\
&= \int_2^4 dz \int_{A_z} (x^2 + y^2)^4 dxdy = \int_2^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5-z}} \rho^4 \rho\, d\rho = \frac{20}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.

Calcolare

$$\int_A \frac{y}{1 + z^4}\, dx\, dydz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le x + y, \quad z \in [0, 1]\}$.

Soluzione.

Integrazione per strati. La proiezione di A sull'asse z e' $[0, 1]$.

La sezione orizzontale a quota z e'

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le x + y\}.$$

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{y}{1 + z^4}\, dx\, dydz \\
&= \int_0^1 dz \int_{A_z} \frac{y}{1 + z^4} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{1 + z^4} dz \int_0^z dx \int_{z-x}^{\sqrt{z^2-x^2}} ydy = \\
&\int_0^1 \frac{1}{1 + z^4} dz \int_0^z \frac{1}{2}\Big(2xz - 2x^2\Big) dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{z^3}{1 + z^4} dz = \frac{1}{24}\log 2.
\end{aligned}$$