Massimi e minimi vincolati: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e minimo locali e assoluti delle seguenti funzioni di due variabili sugli insiemi specificati:

a) $f(x,y) = x + y, \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array} \right]$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1, \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 9\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0, \pm 3) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (\pm 3, 0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array} \right]$$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (3, 6) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ (-1, -2) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array} \right]$$

d) $f(x,y) = xy, \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 + xy - 1 = 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (1, -1), \, (-1, 1) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array} \right]$$

*$e)$ $f(x,y)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)$ $\qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\right\}$

$$\left[\begin{array}{l}(0,0)\text{ punto di massimo locale,}\\(0,\pm3),\ (\pm3,0)\text{ punti di massimo assoluto,}\\(\pm2,\pm2)\text{ punti di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

$f)$ $f(x,y)=2x^2+y^2-x$ $\qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l}(1,0)\text{ punto di massimo locale,}\\(-1,0)\text{ punto di massimo assoluto,}\\\left(\frac{1}{4},0\right)\text{ punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

$g)$ $f(x,y)=3x^2+4y^2-6x-12$ $\qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-4\le 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l}(-2,0)\text{ punto di massimo assoluto,}\\(1,0)\text{ punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

*$h)$ $f(x,y)=e^{xy}$ $\qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-1\le y\le 3\right\}$

$$\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3}\right)\text{ punto di massimo locale,}\\\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3}\right)\text{ punto di minimo locale,}\\(2,3)\text{ punto di massimo assoluto,}\\(-2,3)\text{ punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

Svolgimento

$a)$ La funzione $f(x,y)=x+y$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y)=x^2+y^2-1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x+y-\lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

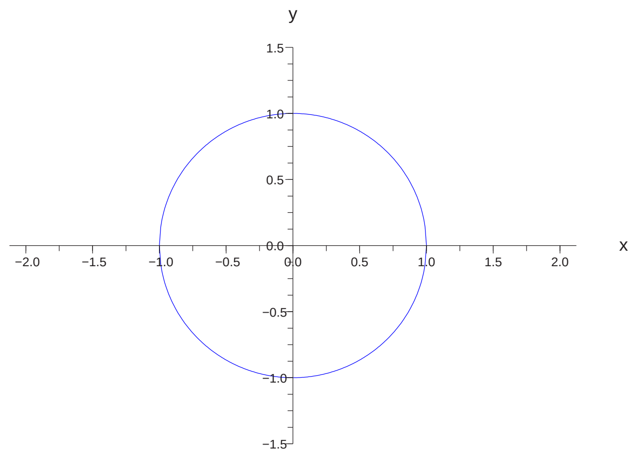

Fig. 1: L'insieme M.

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Essendo

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

si ha che $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di massimo assoluto di f su M e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di minimo assoluto di f su M.

b) La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 9\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f

ammette massimo e minimo su M.

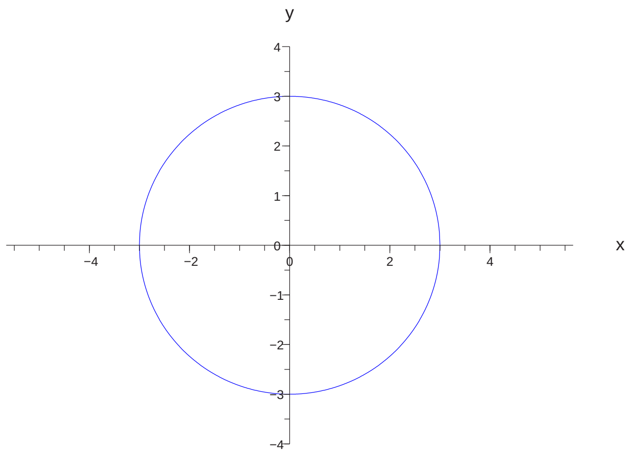

Fig. 2: L'insieme M.

Per ogni $(x,y) \in M$ si ha $x^2 = 9 - y^2$. Posto $\varphi = f_{|M}$, si ha che $\varphi : [-3,3] \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi(y) = f(x(y),y) = y^2 + 2$. Quindi per ogni $-3 \leq y \leq 3$ si ha $2 \leq \varphi(y) \leq 11$, più precisamente

$$\min_M \varphi = 2 = \varphi(0), \qquad \max_M \varphi = 11 = \varphi(\pm 3),$$

ossia

$$\min_M f = 2 = f(\pm 3, 0), \qquad \max_M f = 11 = f(0, \pm 3).$$

Ne segue che $(\pm 3, 0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M e $(0, \pm 3)$ sono punti di massimo assoluto per f su M.

c) La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20$,

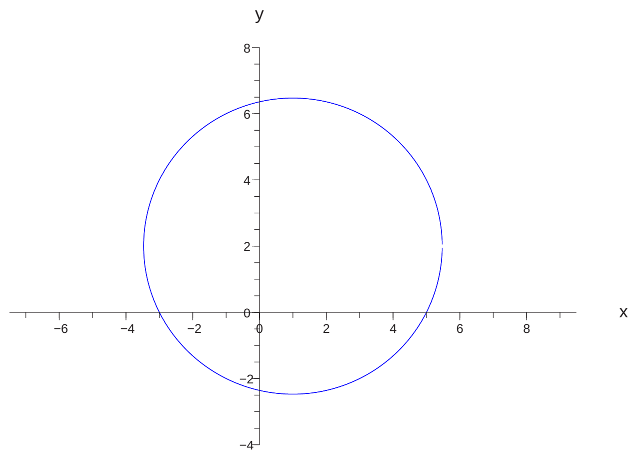

Fig. 3: L'insieme M.

consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left[(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\right].$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda(x-1) \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - 2\lambda(y-2) \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left[(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\right]. \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x(1-\lambda) = -\lambda \\ y(1-2\lambda) = -\lambda \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ y = \frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ \lambda = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $\left(-1,-2,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(3,6,\frac{3}{2}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(-1,-2)$ e $(3,6)$. Essendo

$$f(-1,-2) = 5, \qquad f(3,6) = 45,$$

si ha che $(3,6)$ è il punto di massimo assoluto di f su M e $(-1,-2)$ è il punto di minimo assoluto di f su M.

d) La funzione $f(x, y) = xy$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0\right\}$$

è compatto. Infatti, è chiuso in quanto complementare di

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 > 0\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 < 0\right\}$$

che è aperto in quanto unione di due aperti. Inoltre è anche limitato. Infatti, se non lo fosse, allora esisterebbero in M punti (x, y) con $|x|$ o $|y|$ arbitrariamente grande. Ma se $(x, y) \in M$, allora $x^2 + y^2 = 1 - xy$. Quindi

$$|x| \text{ o } |y| \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad xy \to -\infty \text{ con } xy \sim -(x^2 + y^2).$$

Ne segue che deve essere $y \sim -x$, cioè $-x^2 \sim xy \sim -2x^2$ per $|x| \to +\infty$: assurdo. In modo del tutto equivalente, si osserva che la curva $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ è l'equazione di un'ellisse reale. Infatti, la matrice associata al polinomio $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 1$ e la matrice dei termini di secondo grado del polinomio g sono rispettivamente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det A = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tr}(A) = 2$ e $\det B = -\frac{3}{4} \neq 0$. Essendo $\det A > 0$ e $\operatorname{tr}(A) \cdot \det B < 0$, si ha che la conica $g(x, y) = 0$ è un'ellisse reale.

Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M. Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda\left(x^2 + y^2 + xy - 1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = y - \lambda(2x + y) \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = x - \lambda(x + 2y) \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(x^2 + y^2 + xy - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} y(1-\lambda)=2\lambda x\\ x(1-\lambda)=2\lambda y\\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} (y-x)(1+\lambda)=0\\ x(1-\lambda)=2\lambda y\\ x^2+y^2+xy=1. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(1,-1)$, $(-1,1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Essendo

$$f(1,-1)=f(-1,1)=-1, \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

si ha che $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ sono punti di massimo assoluto di f su M e $(1,-1)$ e $(-1,1)$ sono punti di minimo assoluto di f su M.

*e) La funzione $f(x,y)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

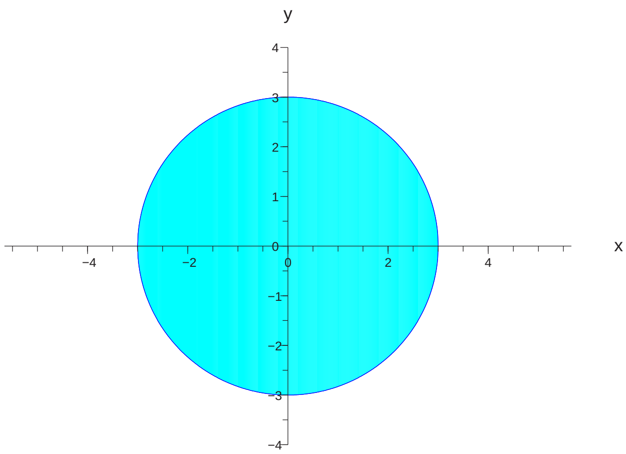

Fig. 4: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<9\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y)\in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y)=0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-16x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-16y.$$

Quindi i punti stazionari di f in $int(M)$ sono: $(0,0)$, $(0,\pm 2)$, $(\pm 2,0)$, $(\pm 2,\pm 2)$. Per stabilire se sono di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in (x,y) è

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 16 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow (0,0) \text{ è un punto di massimo locale per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(0,\pm 2) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (0,\pm 2) \text{ sono punti di sella per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(\pm 2,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (\pm 2,0) \text{ sono punti di sella per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(\pm 2,\pm 2) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\pm 2,\pm 2) \text{ sono punti di minimo locale per } f \text{ su } M.$$

Il massimo locale è $f(0,0) = 0$ e il minimo locale è $f(\pm 2,\pm 2) = -32$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 9\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2 + y^2\right) - \lambda\left(x^2 + y^2 - 9\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 4x^3 - 16x - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 4y^3 - 16y - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 9\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda)=0 \quad\iff\quad \begin{cases} 2x\left(2x^2-8-\lambda\right)=0\\ 2y\left(2y^2-8-\lambda\right)=0\\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(0,\pm 3,10)$, $(\pm 3,0,10)$, $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},1\right)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(0,\pm 3)$, $(\pm 3,0)$, $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Essendo

$$f(0,\pm 3)=f(\pm 3,0)=9>0=f(0,0),$$
$$f\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=-\frac{63}{2}>-32=f(\pm 2,\pm 2),$$

si ha che $(0,\pm 3)$ e $(\pm 3,0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M, mentre $(\pm 2,\pm 2)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

Inoltre i punti $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ sono di minimo assoluto per f su ∂M. Resta da stabilire se $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2},\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ sono punti di minimo locale per f su M. Facciamo uno studio locale di f in un intorno di questi punti. Consideriamo per esempio il punto $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Se esiste un intorno I di questo punto in cui

$$f(x,y)-f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)+\frac{63}{2}$$

è sempre ≥ 0 o ≤ 0 per ogni $(x,y)\in I\cap M$, allora il punto $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ è rispettivamente di minimo o di massimo locale per f su M. Se invece per ogni intorno I di questo punto si ha che in $I\cap M$ la differenza $f(x,y)-f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ cambia segno, allora questo punto non è né di massimo né di minimo per f su M.

Sappiamo già che $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ è un punto di minimo (assoluto) per f su ∂M. Quindi detto I un intorno di questo punto, per ogni $(x,y)\in I\cap\partial M$ si ha che

$$f(x,y)-f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)+\frac{63}{2}\geq 0.$$

Proviamo se per ogni intorno I di $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ esistono punti $(x,y)\in I\cap int(M)$ tali che

$$f(x,y)-f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)+\frac{63}{2}<0.$$

Sappiamo che il punto $(2,2)$ è di minimo assoluto per f su M. Consideriamo i punti (x,y) appartenenti al segmento di estremi $(2,2)$ e $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Proviamo se in ogni intorno I di $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ esistono punti (x,y) di questo segmento tali che

$$f(x,y)-f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)+\frac{63}{2}<0.$$

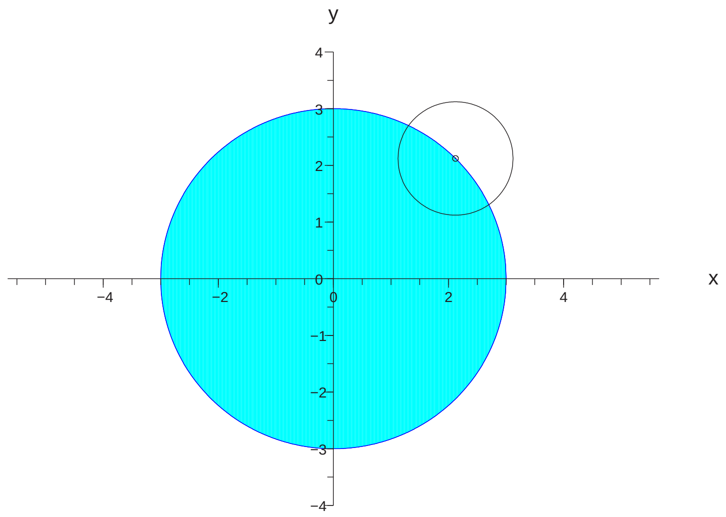

Fig. 5: L'insieme M e l'intorno I di $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

Scriviamo la funzione f in coordinate polari. Quindi, posto

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta, \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

si ha che

$$f(\rho,\vartheta) = f(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2+y^2\right) = \rho^4\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right) - 8\rho^2$$

e $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2+y^2 \leq 9\right\} = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\right\}$.

I punti del segmento di estremi $(2,2)$ e $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ sono i punti (ρ,ϑ) con $2\sqrt{2} \leq \rho \leq 3$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Si ha che

$$f(x,y) - f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = f(\rho,\vartheta) - f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\rho^4 - 8\rho^2 + \frac{63}{2}.$$

Quindi

$$f(\rho,\vartheta) - f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) < 0$$

se e solo se

$$\rho^4 - 16\rho^2 + 63 < 0 \quad\iff\quad \left(\rho^2-8\right)^2 < 1 \quad\iff\quad \left|\rho^2-8\right| < 1 \iff \sqrt{7} < \rho < 3.$$

Poichè in ogni intorno I di $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ ci sono punti $(x,y) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$ con $\sqrt{7} < \rho < 3$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, ne segue che il punto $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ non è né di massimo né

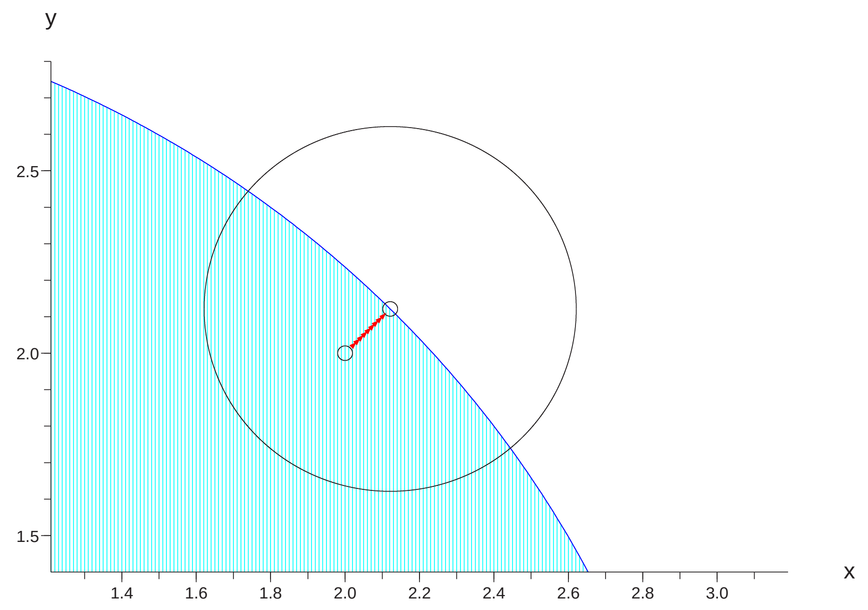

Fig. 6: Particolare del segmento di estremi $(2,2)$ e $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che anche i punti $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

In conclusione si ha che i punti $(0, \pm 3)$ e $(\pm 3, 0)$ sono di massimo assoluto per f su M, il punto $(0,0)$ è di massimo locale per f su M e i punti $(\pm 2, \pm 2)$ sono di minimo assoluto per f su M.

f) La funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

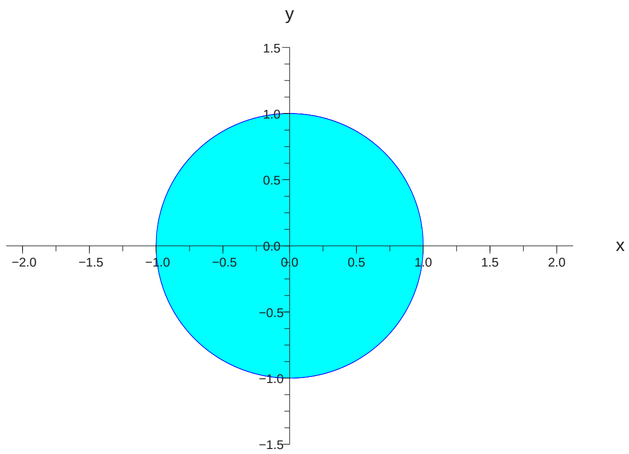

Fig. 7: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è un punto di minimo locale per f su M e il minimo locale è $f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{8}$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Per ogni $(x, y) \in \partial M$ si ha che $y^2 = 1 - x^2$. Posto $\varphi = f_{|\partial M}$, si ha che $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è defința da

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = x^2 - x + 1.$$

I punti di estremo di f su ∂M sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ. Essendo φ di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$. Si ha che $\varphi'(x) = 2x - 1$. Quindi $\varphi'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$ e $\varphi'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Ne segue che $x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo per φ. Inoltre $x = \pm 1$ sono punti di massimo locale per φ. Più precisamente, essendo $\varphi(-1) = 3$ e $\varphi(1) = 1$, si ha che $x = -1$ è un punto di massimo assoluto per φ, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale per φ. Quindi $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sono punti di minimo assoluto per f su ∂M, $(-1, 0)$ è un punto di massimo assoluto per f su ∂M e $(1, 0)$ è un punto di massimo locale per f su ∂M. Essendo

$$f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} > -\frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

si ha che $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è il punto di minimo assoluto per f su M. Inoltre $(-1, 0)$ è un punto di massimo assoluto per f su M. Resta da valutare se i punti $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sono di minimo locale per f su M e se $(1, 0)$ è un punto di massimo locale per f su M. Facciamo uno studio locale di f in un intorno di questi punti. Consideriamo inizialmente il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Sappiamo che è di minimo assoluto per f su ∂M. Quindi per ogni $(x, y) \in \partial M$ si ha che

$$f(x, y) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0.$$

Proviamo se per ogni intorno I di $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ esistono punti $(x, y) \in I \cap M$ tali che

$$f(x, y) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0.$$

Consideriamo i punti $\left(\frac{1}{2}, y\right) \in M$ con $0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha che

$$f\left(\frac{1}{2}, y\right) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y^2 - \frac{3}{4} < 0.$$

Poichè ogni intorno I di $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ contiene punti del tipo $\left(\frac{1}{2}, y\right)$, per qualche $y \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ne segue che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ non è né di massimo né di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ non è né di massimo né di minimo per f su M.

Infine consideriamo il punto $(1, 0)$. Sappiamo che è di massimo locale per f su ∂M. Quindi esiste un intorno I di $(1, 0)$ tale che per ogni $(x, y) \in I \cap \partial M$ si ha

$$f(x, y) - f(1, 0) \leq 0.$$

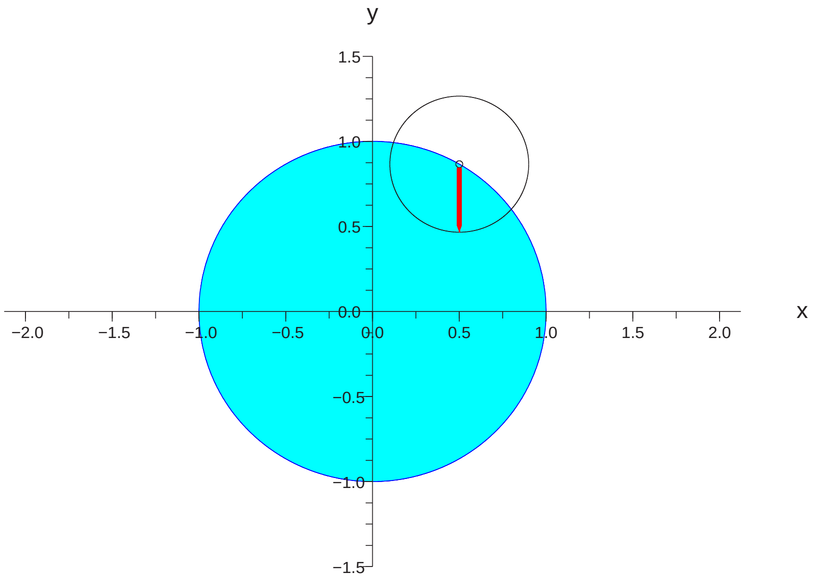

Fig. 8: Particolare dei punti $\left(\frac{1}{2}, y\right)$ nell'intorno I di $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Proviamo se in questo intorno I di $(1,0)$ esistono punti $(x,y) \in I \cap M$ tali che

$$f(x,y) - f(1,0) > 0.$$

Consideriamo i punti $(x,0) \in M$ con $0 \leq x < 1$. Si ha che

$$f(x,0) - f(1,0) = 2x^2 - x - 1.$$

La funzione $g(x) = 2x^2 - x - 1$ è derivabile in $[0,1]$ con $g'(x) = 4x - 1$. Quindi $g'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{4}$ e $g'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{4} < x \leq 1$. Ne segue che g è strettamente crescente in $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$, cioè $g(x) < g(1) = 0$ per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$. Pertanto si ha che per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$

$$f(x,0) - f(1,0) = 2x^2 - x - 1 < 0.$$

Pertanto anche rispetto ai punti $(x,0)$, con $0 \leq x \leq 1$, si ha che $(1,0)$ è di massimo locale per f. Viene il sospetto che $(1,0)$ possa essere di massimo locale per f su M. Proviamo quindi se esiste un intorno I di $(1,0)$ tale che per ogni $(x,y) \in I \cap M$ si ha che

$$f(x,y) - f(1,0) \leq 0.$$

Per ogni $(x, y) \in M$, cioè tale che $x^2 + y^2 \leq 1$, si ha

$$f(x, y) - f(1, 0) = 2x^2 + y^2 - x - 1 \leq x^2 - x = x(x - 1).$$

Quindi se $(x, y) \in M$ con $0 \leq x \leq 1$ si ha che

$$f(x, y) - f(1, 0) \leq x(x - 1) \leq 0.$$

Quindi per ogni $(x, y) \in I \cap M$, dove $I = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$, si ha che

$$f(x, y) - f(1, 0) \leq 0.$$

Ne segue che il punto $(1, 0)$ è di massimo locale per f su M.

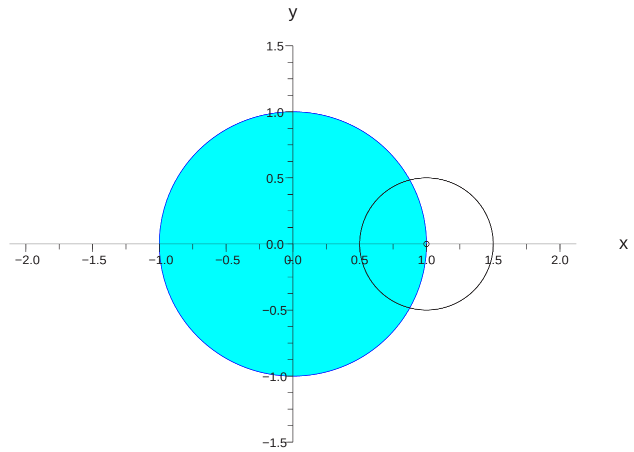

Fig. 9: L'insieme M e l'intorno I di $(1, 0)$.

g) La funzione $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 4 \leq 0\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

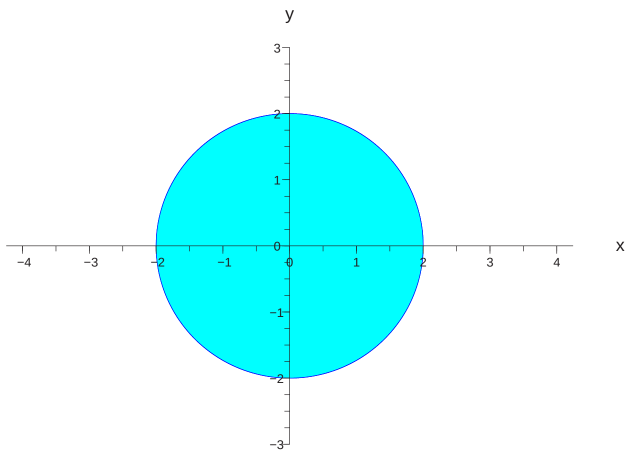

Fig. 10: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $(1,0)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $(1,0)$ è

$$\mathcal{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(1,0)$ è un punto di minimo locale per f su M e il minimo locale è $f(1,0) = -15$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Per ogni $(x,y) \in \partial M$ si ha che $y^2 = 4 - x^2$. Posto $\varphi = f_{|\partial M}$, si ha che $\varphi : [-2,2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = -x^2 - 6x + 4.$$

I punti di estremo di f su ∂M sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ. Essendo φ di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-2,2]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-2,2]$. Si ha che $\varphi'(x) = -2x - 6$. Quindi φ non ha punti stazionari in $[-2,2]$ e $\varphi'(x) < 0$

per ogni $x \in [-2, 2]$. Ne segue che $x = -2$ è un punto di massimo assoluto per φ e $x = 2$ è un punto di minimo assoluto per φ. Quindi $(-2, 0)$ è un punto di massimo assoluto per f su ∂M, $(2, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f su ∂M. Essendo

$$f(2, 0) = -12 > -15 = f(1, 0),$$

si ha che $(1, 0)$ è il punto di minimo assoluto per f su M. Inoltre $(-2, 0)$ è il punto di massimo assoluto per f su M. Resta da valutare se il punto $(2, 0)$ è di minimo locale per f su M. Facciamo uno studio locale di f in un intorno di questo punto. Sappiamo che è di minimo assoluto per f su ∂M. Quindi per ogni $(x, y) \in \partial M$ si ha che

$$f(x, y) - f(2, 0) \geq 0.$$

Proviamo se per ogni intorno I di $(2, 0)$ esistono punti $(x, y) \in I \cap M$ tali che

$$f(x, y) - f(2, 0) < 0.$$

Consideriamo i punti $(x, 0) \in M$ con $0 \leq x < 2$. Si ha che

$$f(x, 0) - f(2, 0) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) < 0.$$

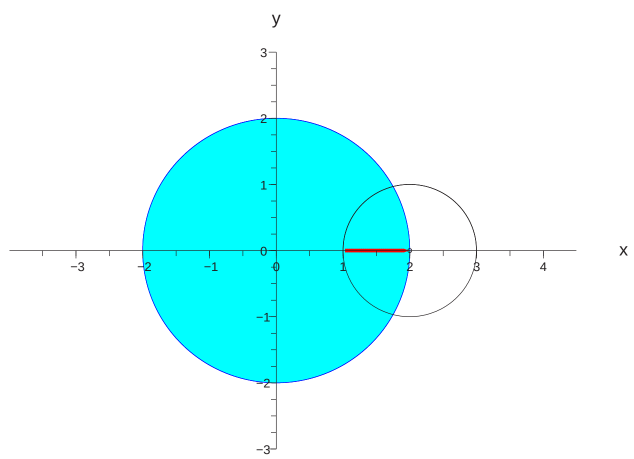

Fig. 11: Particolare dei punti $(x, 0)$ nell'intorno I di $(2, 0)$.

Poichè ogni intorno I di $(2, 0)$ contiene punti del tipo $(x, 0)$, per qualche $x \in [0, 2)$, ne segue che il punto $(2, 0)$ non è né di massimo né di minimo per f su M.

$*h)$ La funzione $f(x,y) = e^{xy}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 - 1 \le y \le 3 \le 0 \right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

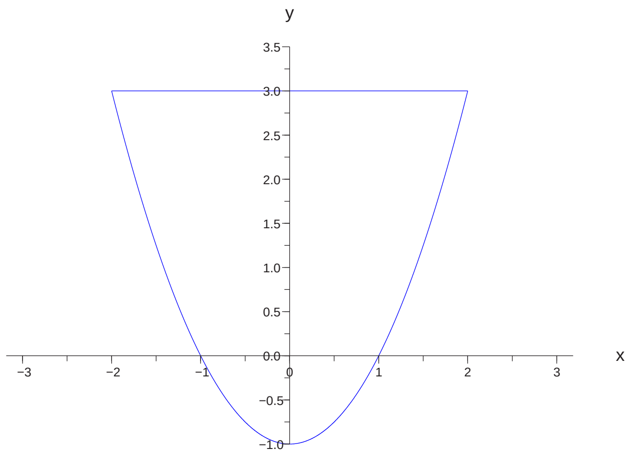

Fig. 12: L'insieme M è la parte di piano limitata dalla linea blu (∂M).

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 - 1 < y < 3 \right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y) \in \; int(M)$ tali che $\nabla f(x,y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}.$$

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $(0,0)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy}(1+xy).$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $(0,0)$ è

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Quindi $(0,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo locale per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M. Osserviamo che ∂M non è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, infatti in un intorno dei punti $(\pm 2, 3)$ l'insieme ∂M non è il grafico di una funzione di classe C^1 di una delle due variabili rispetto all'altra. Si osservi inoltre che $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove

$$\Gamma_1 = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ y = 3, \, -2 \leq x \leq 2 \Big\},$$

$$\Gamma_2 = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ y = x^2 - 1, \, -2 \leq x \leq 2 \Big\}.$$

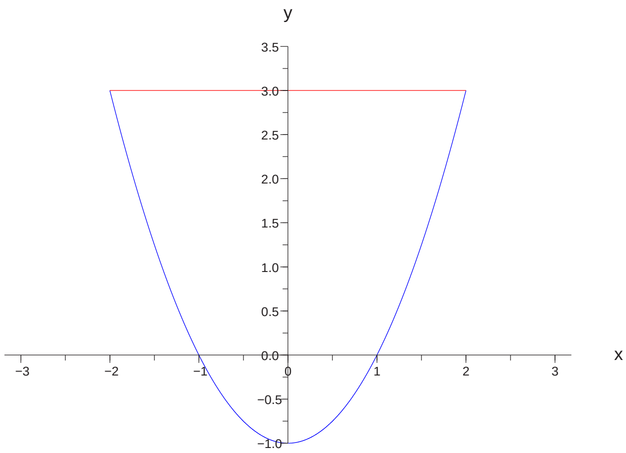

Fig. 13: Gli insiemi Γ_1 (in rosso) e Γ_2 (in blu).

Cerchiamo separatamente i punti di estremo di f su Γ_1 e Γ_2. Consideriamo inizialmente Γ_1. Per ogni $(x,y) \in \Gamma_1$ si ha che $y = 3$. Posto $\varphi_1 = f_{|\Gamma_1}$, si ha che $\varphi_1 : [-2,2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi_1(x) = f(x,3) = e^{3x}.$$

I punti di estremo di f su Γ_1 sono i punti $(x,3)$ con x di estremo per φ_1. Essendo φ_1 strettamente crescente in $[-2,2]$, si ha che $x = -2$ è un punto di minimo assoluto per φ_1 e $x = 2$ è un punto di massimo assoluto per φ_1. Quindi $(-2,3)$ è un punto di minimo assoluto per f su Γ_1, $(2,3)$ è un punto di massimo assoluto per f su Γ_1.

Consideriamo ora Γ_2. Per ogni $(x,y) \in \Gamma_2$ si ha che $y = x^2 - 1$. Posto $\varphi_2 = f_{|\Gamma_2}$, si ha che $\varphi_2 : [-2,2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi_2(x) = f(x, y(x)) = e^{x^3 - x}.$$

I punti di estremo di f su Γ_2 sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ_2. Essendo φ_2 di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-2,2]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-2,2]$. Si ha che $\varphi_2'(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3-x}$. Quindi $\varphi_2'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\varphi_2'(x) > 0$ per $x \in \left[-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right]$. Ne segue che $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = 2$ sono punti di massimo locale per φ_2, $x = -2$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di minimo locale per φ_2. Ne segue che i punti $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $(2,3)$ sono di massimo locale per f su Γ_2, $(-2,3)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ sono di minimo locale per f su Γ_2. Quindi il punto $(2,3)$ è di massimo locale per f ristretta a $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e il punto $(-2,3)$ è di minimo locale per f ristretta a $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Essendo

$$f(-2,3) = e^{-6}, \quad f(2,3) = e^6, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{\frac{2}{9}\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{2}{9}\sqrt{3}},$$

si ha che $(2,3)$ è il punto di massimo assoluto per f su M e $(-2,3)$ è il punto di minimo assoluto per f su M. Resta da valutare se i punti $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ sono rispettivamente di massimo e di minimo locale per f su M. Facciamo uno studio locale di f in un intorno di questi punti. Consideriamo il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Sappiamo che è di minimo locale per f su ∂M. Quindi esiste un intorno I di $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ tale che per ogni $(x,y) \in I \cap \partial M$ si ha che

$$f(x,y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) \geq 0.$$

Proviamo se esiste un intorno I di $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ tale che per ogni $(x,y) \in I \cap M$ si ha che

$$f(x,y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{xy} - e^{-\frac{2}{9}\sqrt{3}} \geq 0.$$

Questo fatto equivale a

$$xy \geq -\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

L'iperbole di equazione $xy = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ è tangente a ∂M nel punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Infatti, posto $g(x) = -\frac{2}{9x}\sqrt{3}$, si ha che la retta tangente a $y = g(x)$ e alla parabola $y = x^2 - 1$ in $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ha equazione

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

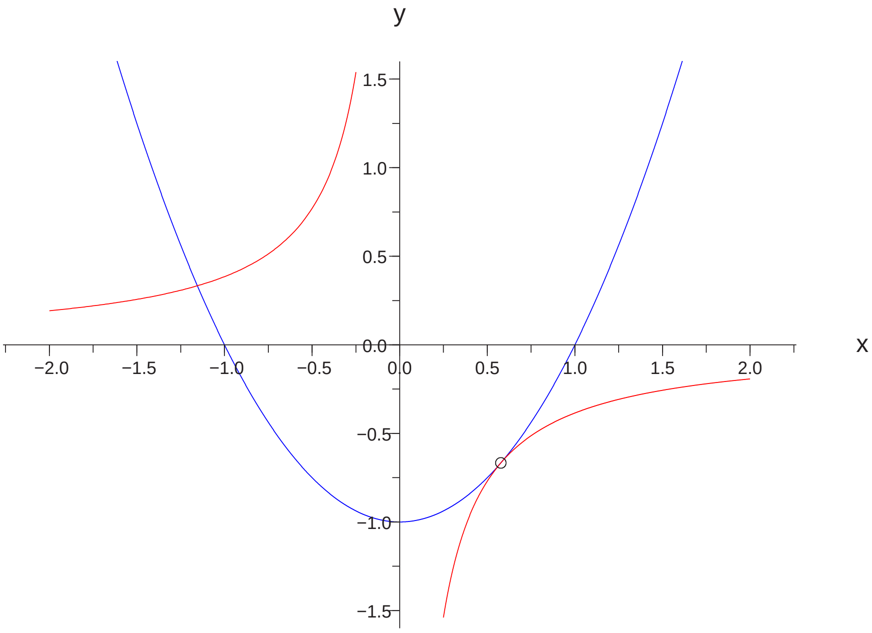

Fig. 14: L'iperbole $xy = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (in rosso) e la parabola $y = x^2 - 1$ (in blu).

Ne segue che l'iperbole $xy = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ e la parabola $y = x^2 - 1$ sono tangenti nel punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Pertanto in un intorno sufficientemente piccolo di $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ si ha che la parabola $y = x^2 - 1$ è contenuta nell'insieme $\left\{(x,y) :\ xy \geq -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right\}$. Quindi se consideriamo un intorno I di $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ sufficientemente piccolo, si ha che

$$I \cap M \subseteq I \cap \left\{(x,y) :\ xy \geq -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right\}.$$

Ne segue che per ogni $(x,y) \in I \cap M$ si ha

$$f(x,y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) \geq 0$$

e quindi il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ è di minimo locale per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che il punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ è di massimo locale per f su M.

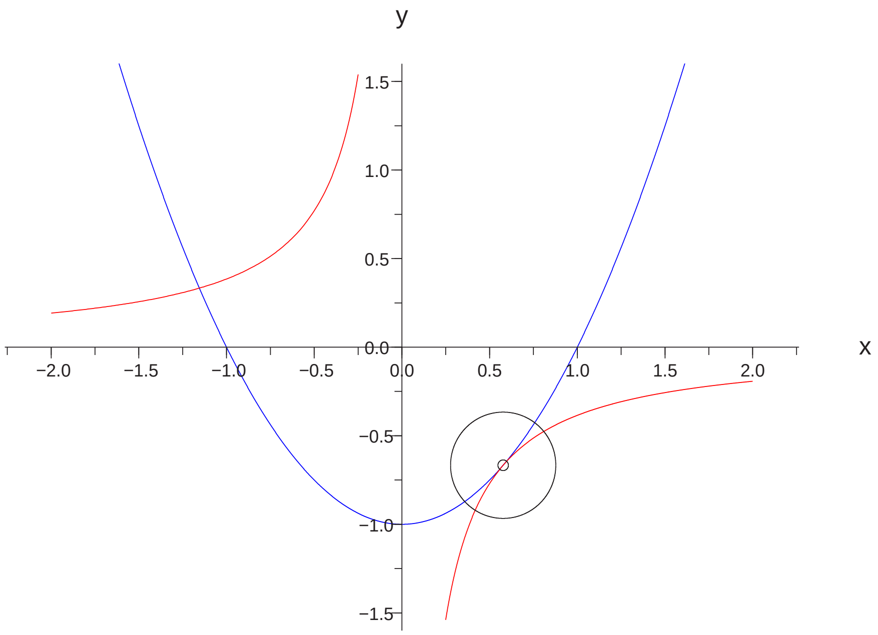

Fig. 15: L'intorno I di $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e minimo locali e assoluti delle seguenti funzioni di tre variabili sugli insiemi specificati:

a) $f(x,y,z) = z^2\, e^{xy} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,0,\pm 1) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (x,y,0) \text{ tali che } x^2+y^2 \le 1 \text{ sono punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2}{z^3} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le z^2-1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(0,\pm\sqrt{2},-\sqrt{3}\right) \text{ e } \left(\pm\sqrt{2},0,\sqrt{3}\right) \text{ sono punti di massimo assoluto,} \\ \left(0,\pm\sqrt{2},\sqrt{3}\right) \text{ e } \left(\pm\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\right) \text{ sono punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

c) $f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x-1)^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(1,\sqrt{\tfrac{5}{2}},\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ \left(1,-\sqrt{\tfrac{5}{2}},\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

d) $f(x,y,z) = x^2+\cos y \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+e^{z^2} = 10\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (\pm 3,0,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm 3,0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

e) $f(x,y,z) = \left(x^2-y^2\right)\sqrt{1+z^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le \dfrac{1}{1+z^2}\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (\pm 1,0,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm 1,0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

f) $f(x,y,z) = \left(x^2-y^2\right)e^{-z^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (\pm 1,0,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm 1,0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

**g*) $f(x,y,z) = g(x) + g(y) + g(z)$, dove $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$g(t) = \begin{cases} t \log t & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x+y+z = 1, \; x,y,z \geq 0\right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

h) $f(x,y,z) = \left(x^2 + 2z^2\right) e^{-y} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 \leq y\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,1,\pm 1) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,y,0), \text{ con } y \geq 0 \text{ sono punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

i) $f(x,y,z) = \dfrac{y^2 - z^2}{1 + x^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,\pm 2,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,0,\pm 2) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

l) $f(x,y,z) = \left(1 + z^2\right) e^{-y^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 4 \leq 8e^{-y^2 - z^2}\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,0,\pm\sqrt{\log 2}) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm\sqrt{\log 2},0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

m) $f(x,y,z) = \left(1 + x^2\right) e^{-z^2} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 \leq 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (\pm 1,\pm 1,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm 1,\pm 1) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

n) $f(x,y,z) = -\dfrac{2x^2 + z^2}{y^3} \qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 \leq y^2 - 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,y,0) \text{ con } y \geq 1 \text{ sono punti di massimo locale,} \\ (0,y,0) \text{ con } y \leq -1 \text{ sono punti di minimo locale,} \\ \left(\pm\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0\right) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ \left(\pm\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0\right) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

Svolgimento

I grafici dei domini di questi esercizi si trovano sulla pagina web
http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_maxmin_esercizio_2.html
.

---

a) La funzione $f(x, y, z) = z^2 e^{xy}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z\, e^{xy}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \text{ o } z = 0 \\ x = 0 \text{ o } z = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 < 1$. Osserviamo che anche $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Essendo $f \geq 0$ e $f(x, y, 0) = 0$, si ha che i punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$ sono di minimo assoluto per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = z^2 e^{xy} - \lambda \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = yz^2\, e^{xy} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = xz^2\, e^{xy} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2z\, e^{xy} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -\Big(x^2 + y^2 + z^2 - 1\Big). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} yz^2\, e^{xy} = 2\lambda x \\ xz^2\, e^{xy} = 2\lambda y \\ 2z\,(e^{xy} - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(\pm1, 0, 0, 1)$, $(0, \pm1, 0, 1)$, $(0, 0, \pm1, 1)$, $(x, y, 0, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ e $(0, 0, \pm1)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ sono di minimo assoluto per f su M. Inoltre i punti $(0, 0, \pm1)$ sono di massimo assoluto per f su M.

b) La funzione $f(x, y, z) = \frac{x^2-y^2}{z^3}$ è di classe C^∞ su

$$\mathrm{dom}\,(f) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z \neq 0\Big\}.$$

L'insieme $M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 \leq z^2 - 1\Big\} \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$ è chiuso e illimitato. Infatti, la superficie $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ è un'iperboloide a due falde con asse coincidente con l'asse z. Quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.

Osserviamo che se $(x, y, z) \in M$, cioè $x^2 + y^2 \leq z^2 - 1$, è tale che $\|(x, y, z)\| \to +\infty$, allora necessariamente $|z| \to +\infty$ e

$$|f(x, y, z)| = \left|\frac{x^2 - y^2}{z^3}\right| \leq \frac{x^2 + y^2}{|z|^3} \leq \frac{z^2 - 1}{|z|^3}.$$

Ne segue che

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} f(x, y, z) = \lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} \frac{x^2 - y^2}{z^3} = 0.$$

Quindi per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} (x, y, z) \in M \\ \|(x, y, z)\| > R \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x, y, z) < \varepsilon,$$

cioè

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Proviamo che f ammette massimo e minimo su M. Osserviamo che f e M presentano una simmetria rispetto al piano xy. Infatti se $(x,y,z) \in M$, allora anche $(x,y,-z) \in M$ e $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare che f ammette massimo su M. Sia $(x_0,y_0,z_0) \in M$ tale che $f(x_0,y_0,z_0) > 0$. Un punto siffatto esiste (per esempio $(x,0,z)$ con $x,z > 0$). Poniamo $R_0 = \|(x_0,y_0,z_0)\| = x_0^2+y_0^2+z_0^2$. Evidentemente $R_0 > 0$.

Quindi preso $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0,y_0,z_0)$, esiste $R \geq R_0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Poichè l'insieme $M \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}$ è compatto e non vuoto (perchè contiene (x_0,y_0,z_0)), allora per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo su questo insieme. Quindi esiste $(x_1,y_1,z_1) \in M$ con $x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) \leq f(x_1,y_1,z_1).$$

In particolare $f(x_0,y_0,z_0) \leq f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) < \varepsilon < f(x_0,y_0,z_0) \leq f(x_1,y_1,z_1).$$

Quindi per ogni $(x,y,z) \in M$ si ha che $f(x,y,z) \leq f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che f ammette massimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 < z^2-1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{z^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{2y}{z^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{3(x^2-y^2)}{z^4}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0,0,z)$ con $|z| > 1$. Osserviamo che anche $(0,0,\pm 1)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Si ha che $f(0,0,z)=0$ per ogni $|z|\geq 1$. Inoltre, fissato un punto $(0,0,z_0)$ con $z_0\geq 1$ (analogamente se $z_0\leq -1$) si ha che per ogni intorno I di questo punto esistono punti del tipo $(x,0,z)$ e $(0,y,z)$ appartenenti a $I\cap M$ tali che

$$f(0,y,z)<0<f(x,0,z).$$

Quindi i punti $(0,0,z)$ per ogni $|z|\geq 1$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2=z^2-1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)=\frac{x^2-y^2}{z^3}-\lambda\left(x^2+y^2-z^2+1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=0$. Si ha che

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=\dfrac{2x}{z^3}-2\lambda x\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=-\dfrac{2y}{z^3}-2\lambda y\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=-\dfrac{3(x^2-y^2)}{z^4}+2\lambda z\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=-\left(x^2+y^2-z^2+1\right).\end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}2x\left(\frac{1}{z^3}-\lambda\right)=0\\[2mm] -2y\left(\frac{1}{z^3}+\lambda\right)=0\\[2mm] 2\lambda z^5=3\left(x^2-y^2\right)\\[2mm] x^2+y^2=z^2-1.\end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono:

$$(0,0,1,0),\quad (0,0,-1,0),\quad \left(0,\pm\sqrt{2},\sqrt{3},-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(0,\pm\sqrt{2},-\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right),\quad \left(\pm\sqrt{2},0,\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right),\quad \left(\pm\sqrt{2},0,-\sqrt{3},-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right).$$

Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,0,\pm 1)$, $\left(0,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2},0,\pm\sqrt{3}\right)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(0,0,\pm 1)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M. Inoltre si ha che

$$f\left(0,\pm\sqrt{2},\sqrt{3}\right) = f\left(\pm\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$f\left(0,\pm\sqrt{2},-\sqrt{3}\right) = f\left(\pm\sqrt{2},0,\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Quindi i punti $\left(0,\pm\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)$ e $\left(\pm\sqrt{2},0,\sqrt{3}\right)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $\left(0,\pm\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ e $\left(\pm\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\right)$ sono di minimo assoluto per f su M.

c) La funzione $f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2+y^2+z^2 < 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z)\in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z)=0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Quindi f non ammette punti stazionari in $int(M)$ e di conseguenza neppure punti di estremo.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2+y^2+z^2 = 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = (x-1)^2+y^2+z^2-4$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} - \lambda\left((x-1)^2+y^2+z^2-4\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = -2\lambda(x-1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = \sqrt{1+z^2} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = \dfrac{yz}{\sqrt{1+z^2}} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -\Big((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4\Big). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda(x-1) = 0 \\ \sqrt{1+z^2} = 2\lambda y \\ z\left(\frac{y}{\sqrt{1+z^2}} - 2\lambda\right) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono

$$\left(1, 2, 0, \frac{1}{4}\right), \quad \left(1, -2, 0, -\frac{1}{4}\right), \quad \left(1, \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(1, \pm 2, 0)$ $\left(1, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Si ha che

$$f(1, 2, 0) = 2, \quad f(1, -2, 0) = -2,$$
$$f\left(1, \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}, \quad f\left(1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{5}{2}.$$

Quindi i punti $\left(1, \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $\left(1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ sono di minimo assoluto per f su M. Resta da stabilire se i punti $(1, \pm 2, 0)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, per f su M. Confrontiamo f in tali punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $(1, 2, 0)$ e sia I un qualunque intorno di $(1, 2, 0)$. Presi i punti $(x, y, 0) \in I \cap M$, quindi con $0 < y < 2$, si ha che

$$f(x, y, 0) - f(1, 2, 0) = y - 2 < 0.$$

Presi i punti $(1, y, z) \in I \cap M$ con $y^2 + z^2 = 4$, si ha che

$$f(1, y, z) - f(1, 2, 0) = y\sqrt{1+z^2} - 2 = y\sqrt{5-y^2} - 2.$$

Si ha che se $y > 0$

$$y\sqrt{5-y^2} - 2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2\left(5 - y^2\right) \geq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 - 5y^2 + 4 \leq 0$$

$$\iff \quad \left(y^2-4\right)\left(y^2-1\right) \leq 0 \quad \iff \quad 1 \leq y \leq 2.$$

Quindi se $(1,y,z) \in I \cap M$ con $y^2+z^2=4$ e $1 \leq y \leq 2$, si ha che

$$f(1,y,z) - f(1,2,0) = y\sqrt{5-y^2} - 2 \geq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $(1,2,0)$ contiene sia punti del tipo $(x,y,0) \in M$, per qualche $0 < y < 2$, che $(1,y,z) \in M$, per qualche $1 < y < 2$, ne segue che $(1,2,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che $(1,-2,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M.

d) La funzione $f(x,y,z) = x^2 + \cos y$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2+y^2+e^{z^2} = 10\right\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che se $(x,y,z) \in M$, allora $x^2+y^2 = 10 - e^{z^2}$ ed essendo $e^{z^2} \geq 1$ si ha che $0 \leq x^2+y^2 \leq 9$ e $0 \leq z^2 \leq \log 10$. Quindi $\|(x,y,z)\| = x^2+y^2+z^2 \leq 9+\log 10$. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2+y^2+e^{z^2}-10$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(1+z^2\right)e^{-y^2} - \lambda\left(x^2+y^2+e^{z^2}-10\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -\sin y - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda z e^{z^2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2+y^2+e^{z^2}-10\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2\lambda y + \sin y = 0 \\ \lambda z = 0 \\ x^2+y^2+e^{z^2} = 10. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(0,0,\pm\sqrt{\log 10},0)$, $\left(0,\pm 3,0,-\frac{1}{6}\sin 3\right)$, $(\pm 3,0,0,1)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(0,0,\pm\sqrt{\log 10})$, $(0,\pm 3,0,)$, $(\pm 3,0,0)$. Si ha che

$$f\left(0,0,\pm\sqrt{\log 10}\right)=1, \qquad f(0,\pm 3,0)=\cos 3, \qquad f(\pm 3,0,0)=10.$$

Quindi $(\pm 3,0,0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0,\pm 3,0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

Resta da stabilire se $(0,0,\pm\sqrt{\log 10})$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, per f su M. Confrontiamo f in tali punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $(0,0,\sqrt{\log 10})$ e sia I un qualunque intorno di $(0,0,\sqrt{\log 10})$. Presi i punti $(0,y,z)\in I\cap M$ con $y\neq 0$, si ha che

$$f(0,y,z)-f\left(0,0,\sqrt{\log 10}\right)=\cos y-1<0.$$

Presi i punti $(x,0,z)\in I\cap M$, si ha che

$$f(x,0,z)-f\left(0,0,\sqrt{\log 10}\right)=x^2\geq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $(0,0,\sqrt{\log 10})$ contiene sia punti del tipo $(0,y,z)\in M$, per qualche $y\neq 0$, che $(x,0,z)\in M$, ne segue che $(0,0,\sqrt{\log 10})$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che $(0,0,-\sqrt{\log 10})$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M.

e) La funzione $f(x,y,z)=(x^2-y^2)\sqrt{1+z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2\leq\frac{1}{1+z^2}\right\}$$

è chiuso e illimitato. Quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.

Osserviamo che se $(x,y,z)\in M$, cioè $x^2+y^2\leq\frac{1}{1+z^2}$, è tale che $\|(x,y,z)\|\to+\infty$, allora necessariamente $|z|\to+\infty$, mentre $x^2+y^2\leq 1$, e

$$|f(x,y,z)|=\left|x^2-y^2\right|\sqrt{1+z^2}\leq\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+z^2}\leq\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Ne segue che

$$\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty}f(x,y,z)=\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty}\left(x^2-y^2\right)\sqrt{1+z^2}=0.$$

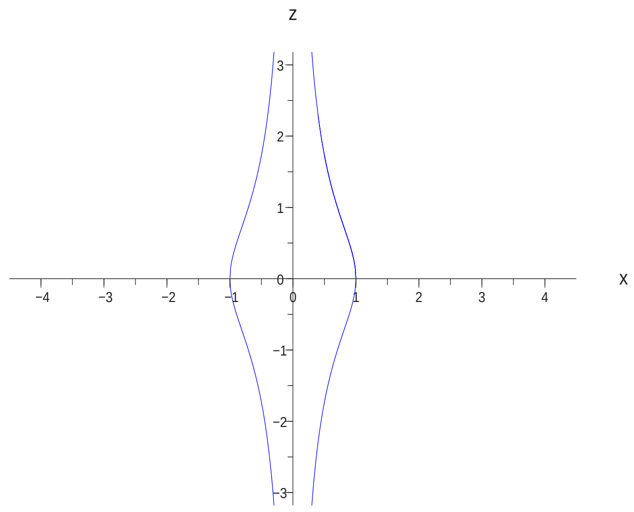

Fig. 16: Sezione dell'insieme ∂M con il piano xz.

Quindi per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ \|(x,y,z)\| > R \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon,$$

cioè

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Proviamo che f ammette massimo e minimo su M. Osserviamo che f e M presentano una simmetria rispetto ai piani $\pi_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x-y=0\right\}$ e $\pi_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x+y=0\right\}$. Infatti se $(x,y,z) \in M$, allora i suo simmetrici rispetto ai piani π_1 e π_2 sono rispettivamente (y,x,z) e $(-y,-x,z)$, che appartengono a M, e $f(y,x,z) = f(-y,-x,z) = -f(x,y,z)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare che f ammette massimo su M. Sia $(x_0,y_0,z_0) \in M$ tale che $f(x_0,y_0,z_0) > 0$. Un punto siffatto esiste (per esempio $(x,0,z)$ con $x > 0$). Poniamo $R_0 = \|(x_0,y_0,z_0)\| = x_0^2+y_0^2+z_0^2$. Evidentemente $R_0 > 0$.

Quindi preso $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0,y_0,z_0)$, esiste $R \geq R_0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Poichè l'insieme $M \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}$ è compatto, allora per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo su questo insieme. Quindi esiste

$(x_1, y_1, z_1) \in M$ con $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$ tale che

$$\begin{cases} (x, y, z) \in M \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \end{cases} \implies f(x, y, z) \leq f(x_1, y_1, z_1).$$

In particolare $f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x_1, y_1, z_1)$. Ne segue che

$$\begin{cases} (x, y, z) \in M \\ x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x, y, z) < \varepsilon < f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x_1, y_1, z_1).$$

Quindi per ogni $(x, y, z) \in M$ si ha che $f(x, y, z) \leq f(x_1, y_1, z_1)$. Ne segue che f ammette massimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < \frac{1}{1+z^2}\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x\sqrt{1+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y\sqrt{1+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{(x^2 - y^2)z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm y \text{ o } z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0, 0, z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Si ha che $f(0, 0, z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Inoltre, fissato un punto $(0, 0, z_0)$ si ha che per ogni intorno I di questo punto esistono punti del tipo $(x, 0, z)$ e $(0, y, z)$ appartenenti a $I \cap M$ tali che

$$f(0, y, z) < 0 < f(x, 0, z).$$

Quindi i punti $(0, 0, z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = \frac{1}{1+z^2}\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{1+z^2}$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = \left(x^2 - y^2\right)\sqrt{1+z^2} - \lambda\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{1+z^2}\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 2x\sqrt{1+z^2} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = -2y\sqrt{1+z^2} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = \dfrac{(x^2-y^2)z}{\sqrt{1+z^2}} - \dfrac{2\lambda z}{(1+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -\left(x^2+y^2-\dfrac{1}{1+z^2}\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(\sqrt{1+z^2}-\lambda\right) = 0 \\ -2y\left(\sqrt{1+z^2}+\lambda\right) = 0 \\ z\left[\frac{x^2-y^2}{\sqrt{1+z^2}} - \frac{2\lambda}{(1+z^2)^2}\right] = 0 \\ x^2+y^2 = \frac{1}{1+z^2}. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $(0, \pm1, 0, -1)$ e $(\pm1, 0, 0, 1)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0, \pm1, 0)$ e $(\pm1, 0, 0)$. Si ha che

$$f(0, \pm1, 0) = -1, \qquad f(\pm1, 0, 0) = 1.$$

Quindi i punti $(\pm1, 0, 0)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $(0, \pm1, 0)$ sono di minimo assoluto per f su M.

f) La funzione $f(x, y, z) = (x^2-y^2)\, e^{-z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. La superficie $x^2+y^2 = 1$ è un cilindro retto con asse coincidente con l'asse z. Ne segue che l'insieme $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1\right\}$ è chiuso e illimitato. Quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.

Osserviamo che se $(x, y, z) \in M$, cioè $x^2+y^2 \leq 1$, è tale che $\|(x, y, z)\| \to +\infty$, allora necessariamente $|z| \to +\infty$ e

$$|f(x, y, z)| = \left|x^2-y^2\right| e^{-z^2} \leq \left(x^2+y^2\right) e^{-z^2} \leq e^{-z^2}.$$

Ne segue che

$$\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} f(x, y, z) = \lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} \left(x^2-y^2\right) e^{-z^2} = 0.$$

Quindi per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} (x, y, z) \in M \\ \|(x, y, z)\| > R \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x, y, z) < \varepsilon,$$

cioè
$$\begin{cases} (x,y,z)\in M \\ x^2+y^2+z^2>R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z)<\varepsilon.$$
Proviamo che f ammette massimo e minimo su M. Osserviamo che f e M presentano una simmetria rispetto ai piani $\pi_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x-y=0\right\}$ e $\pi_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y=0\right\}$. Infatti se $(x,y,z)\in M$, allora i suo simmetrici rispetto ai piani π_1 e π_2 sono rispettivamente (y,x,z) e $(-y,-x,z)$, che appartengono a M, e $f(y,x,z)=f(-y,-x,z)=-f(x,y,z)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare che f ammette massimo su M. Sia $(x_0,y_0,z_0)\in M$ tale che $f(x_0,y_0,z_0)>0$. Un punto siffatto esiste (per esempio $(x,0,z)$ con $x>0$). Poniamo $R_0=\|(x_0,y_0,z_0)\|=x_0^2+y_0^2+z_0^2$. Evidentemente $R_0>0$.

Quindi preso $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0,y_0,z_0)$, esiste $R\ge R_0$ tale che
$$\begin{cases} (x,y,z)\in M \\ x^2+y^2+z^2>R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z)<\varepsilon.$$
Poichè l'insieme $M\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$ è compatto, allora per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo su questo insieme. Quindi esiste $(x_1,y_1,z_1)\in M$ con $x_1^2+y_1^2+z_1^2\le R^2$ tale che
$$\begin{cases} (x,y,z)\in M \\ x^2+y^2+z^2\le R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z)\le f(x_1,y_1,z_1).$$
In particolare $f(x_0,y_0,z_0)\le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che
$$\begin{cases} (x,y,z)\in M \\ x^2+y^2+z^2>R^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z)<\varepsilon<f(x_0,y_0,z_0)\le f(x_1,y_1,z_1).$$
Quindi per ogni $(x,y,z)\in M$ si ha che $f(x,y,z)\le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che f ammette massimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in
$$int(M)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2<1\right\}.$$
Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z)\in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z)=0$. Si ha che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x\,e^{-z^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-2y\,e^{-z^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-2z\left(x^2-y^2\right)e^{-z^2}.$$
Quindi
$$\nabla f(x,y,z)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=\pm y \text{ o } z=0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0,0,z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Si ha che $f(0,0,z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Inoltre, fissato un punto $(0,0,z_0)$ si ha che per ogni intorno I di questo punto esistono punti del tipo $(x,0,z)$ e $(0,y,z)$ appartenenti a $I \cap M$ tali che

$$f(0,y,z) < 0 < f(x,0,z).$$

Quindi i punti $(0,0,z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procedia -mo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(x^2 - y^2\right) e^{-z^2} - \lambda \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x\, e^{-z^2} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -2y\, e^{-z^2} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -2z\left(x^2 - y^2\right) e^{-z^2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(e^{-z^2} - \lambda\right) = 0 \\ -2y\left(e^{-z^2} + \lambda\right) = 0 \\ z\,(x^2 - y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $(0,\pm1,0,-1)$ e $(\pm1,0,0,1)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,\pm1,0)$ e $(\pm1,0,0)$. Si ha che

$$f(0,\pm1,0) = -1, \qquad f(\pm1,0,0) = 1.$$

Quindi i punti $(\pm1,0,0)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $(0,\pm1,0)$ sono di minimo assoluto per f su M.

*g) La funzione $f(x,y,z) = g(x) + g(y) + g(z)$, dove $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$g(t) = \begin{cases} t \log t & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

è continua. L'insieme $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z = 1, \ x,y,z \geq 0\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Per ogni $(x,y,x) \in M$ si ha che $z = 1 - x - y$, con $x,y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Posto $\varphi = f_{|M}$, si ha che $\varphi : M_\varphi \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi(x,y) = f(x,y,z(x,y)) = g(x) + g(y) + g(1-x-y)$, dove $M_\varphi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y \leq 1, \ x,y \geq 0\right\}$.

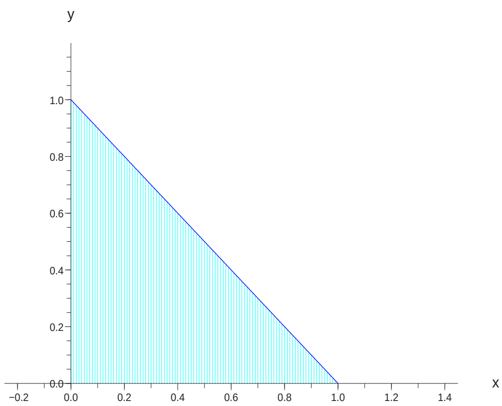

Fig. 17: L'insieme M_φ.

I punti di estremo di f su M sono i punti $(x,y,z(x,y))$ con (x,y) di estremo per φ. Essendo M_φ chiuso e limitato, i punti di estremo di φ vanno cercati sia in $int\,(M_\varphi)$ che su ∂M_φ. Consideriamo inizialmente i punti di estremo di φ in $int\,(M_\varphi) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y < 1, \ x,y > 0\right\}$. Si ha che per ogni $(x,y) \in \ int\,(M_\varphi)$

$$\varphi(x,y) = g(x) + g(y) + g(1-x-y) = x \log x + y \log y + (1-x-y) \log(1-x-y).$$

Essendo φ di classe C^∞in $int\,(M_\varphi)$, i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y) \in \ int\,(M_\varphi)$ tali che $\nabla\varphi(x,y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \log x - \log(1-x-y), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \log y - \log(1-x-y).$$

Quindi

$$\nabla\varphi(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario di φ interno a M_φ è $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di φ in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1-y}{x(1-x-y)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1-x}{y(1-x-y)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{1-x-y}.$$

Quindi la matrice Hessiana di φ in $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è

$$\mathcal{H}_\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono $3, 9$. Quindi $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale per φ. Si ha che $\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\log 3$. Ne segue che $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale per f su M.

Consideriamo ora i punti di estremo di φ su ∂M_φ. Osserviamo che M_φ è il triangolo equilatero di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Quindi ∂M_φ non è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ i lati del triangolo. Si ha che

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0, \ 0 \le x \le 1\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1 - x, \ 0 \le x \le 1\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ 0 \le y \le 1\right\}$$

e $\partial M_\varphi = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

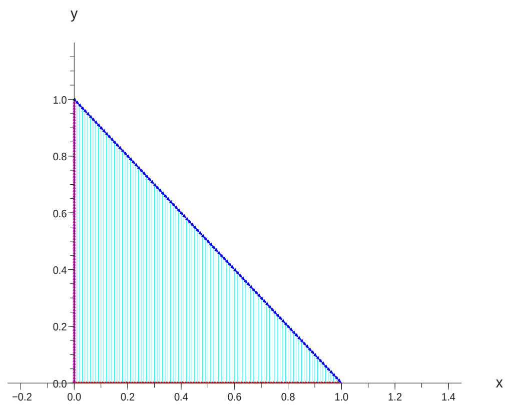

Fig. 18: I lati Γ_1 (in rosso), Γ_2 (in blu) e Γ_3 (in fucsia).

Osserviamo che

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} x\log x+(1-x)\log(1-x) & \text{se } (x,y)\in\Gamma_1\setminus\{(0,0),(1,0)\},\\ x\log x+(1-x)\log(1-x) & \text{se } (x,y)\in\Gamma_2\setminus\{(1,0),(0,1)\},\\ y\log y+(1-y)\log(1-y) & \text{se } (x,y)\in\Gamma_3\setminus\{(0,0),(0,1)\},\\ 0 & \text{se } (x,y)\in\{(0,0),(1,0),(0,1)\}.\end{cases}$$

È quindi sufficiente cercare punti di estremo su uno qualunque dei tre lati Γ_i, per $i=1,2,3$. Consideriamo $\Gamma_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y=0,\ 0\le x\le 1\Big\}$. Posto $\psi=\varphi_{|\Gamma_1}$, allora $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ è definita da

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0,\\ x\log x+(1-x)\log(1-x) & \text{se } 0<x<1,\\ 0 & \text{se } x=1.\end{cases}$$

I punti di estremo di φ su Γ_1 sono i punti $(x,y(x))$ con x di estremo per ψ. Si ha che ψ è continua su $[0,1]$ e derivabile su $(0,1)$ con $\psi'(x)=\log x-\log(1-x)$. Quindi $\psi'(x)=0$ se e solo se $x=\frac{1}{2}$ e $\psi'(x)>0$ se e solo se $x>\frac{1}{2}$. Quindi il punto $x=\frac{1}{2}$ è di minimo assoluto per ψ e i punti $x=0,1$ sono di massimo locale per ψ. Essendo $\psi(0)=\psi(1)=0$ questi punti sono di massimo assoluto per ψ. Ne segue che il punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_1 e i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_1. Analogamente si ha che il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_2 e i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_2, il punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_3 e i punti $(0,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_3. Essendo

$$\varphi\left(\frac{1}{2},0\right)=\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(0,\frac{1}{2}\right)=-\log 2,$$
$$\varphi(0,0)=\varphi(1,0)=\varphi(0,1)=0,$$
$$\varphi\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=-\log 3,$$

si ha che i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su M_φ e il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ è di minimo assoluto per φ su M_φ. Resta da stabilire se i punti $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro per φ su M_φ. Facciamo uno studio locale di φ in un intorno di questi punti. Confrontiamo φ in questi punti con φ in punti di M_φ appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e sia I un qualunque intorno di $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Sappiamo già che questo punto è di minimo assoluto per φ su Γ_1. Quindi presi i punti $(x,0)\in I\cap M_\varphi$ con $0\le x\le 1$, si ha che

$$\varphi(x,0)-\varphi\left(\frac{1}{2},0\right)\ge 0.$$

Presi ora i punti $\left(\frac{1}{2}, y\right) \in I \cap M_\varphi$ con $0 < y < \frac{1}{2}$, si ha che

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, y\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = y \log y + \left(\frac{1}{2} - y\right) \log\left(\frac{1}{2} - y\right) - \frac{1}{2}\log 2.$$

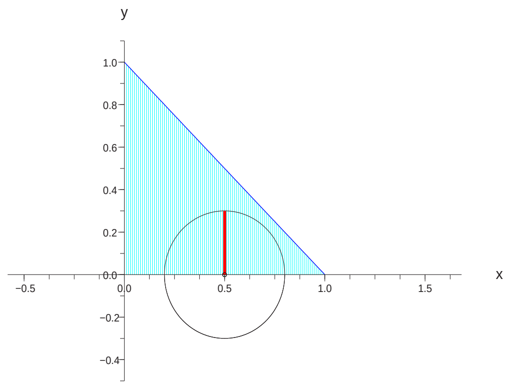

Fig. 19: Particolare dei punti $\left(\frac{1}{2}, y\right)$ in un intorno di $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

La funzione $\vartheta(y) = y \log y + \left(\frac{1}{2} - y\right) \log\left(\frac{1}{2} - y\right) - \frac{1}{2}\log 2$ è continua su $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e derivabile su $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ con $\vartheta'(y) = \log y - \log\left(\frac{1}{2} - y\right)$. Quindi $\vartheta'(y) = 0$ se e solo se $y = \frac{1}{4}$ e $\vartheta'(y) > 0$ se e solo se $y > \frac{1}{4}$. Quindi ϑ è strettamente decrescente su $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. In particolare $\vartheta(y) < \vartheta(0) = 0$ per ogni $y \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$, ossia

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, y\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = y \log y + \left(\frac{1}{2} - y\right) \log\left(\frac{1}{2} - y\right) - \frac{1}{2}\log 2 < 0.$$

Poichè ogni intorno I di $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ contiene sia punti del tipo $(x, 0) \in M$, per qualche $0 < x < 1$, che $\left(\frac{1}{2}, y\right) \in M$, per qualche $0 < y < \frac{1}{4}$, ne segue che $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per φ su M_φ. In modo del tutto analogo si dimostra che i punti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ non sono né di massimo né di minimo per φ su M_φ. In conclusione, i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono di massimo assoluto per f su M e il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è di minimo assoluto per f su M.

h) La funzione $f(x, y, z) = (x^2 + 2z^2)\, e^{-y}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che la superficie $y = x^2 + z^2$ è un paraboloide rotondo con asse coincidente con il semiasse positivo delle ordinate. Pertanto l'insieme $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq y\right\}$ è chiuso e illimitato. Essendo illimitato non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Essendo $f \geq 0$ e $f(0, y, 0) = 0$ per ogni $y \geq 0$, si ha che i punti $(0, y, 0)$, per ogni $y \geq 0$, sono di minimo assoluto per f su M.

Osserviamo inoltre che se $(x,y,z) \in M$, cioè $x^2+z^2 \le y$, è tale che $\|(x,y,z)\| \to +\infty$, allora necessariamente $y \to +\infty$ e $x^2+2z^2 \le 2y = o(e^y)$. Ne segue che

$$\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} f(x,y,z) = \lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} (x^2+2z^2)\, e^{-y} = 0.$$

Quindi per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ \|(x,y,z)\| > R \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon,$$

cioè

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Proviamo che f ammette anche massimo su M. Poichè f non è identicamente nulla su M, esiste $(x_0,y_0,z_0) \in M$ tale che $f(x_0,y_0,z_0) > 0$. Poniamo $R_0 = \|(x_0,y_0,z_0)\| = x_0^2+y_0^2+z_0^2$. Evidentemente $R_0 > 0$.

Quindi preso $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0,y_0,z_0)$, esiste $R \ge R_0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Poichè l'insieme $M \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$ è compatto, allora per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo su questo insieme. Quindi esiste $(x_1,y_1,z_1) \in M \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 \le R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) \le f(x_1,y_1,z_1).$$

Poichè $\|(x_0,y_0,z_0)\| = R_0 \le R$, si ha che $f(x_0,y_0,z_0) \le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon < f(x_0,y_0,z_0) \le f(x_1,y_1,z_1).$$

Quindi per ogni $(x,y,z) \in M$ si ha che $f(x,y,z) \le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che f ammette massimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+z^2 < y\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xe^{-y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\left(x^2+2z^2\right) e^{-y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4ze^{-y}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0,y,0)$ con $y > 0$. Osserviamo che anche $(0,0,0)$ è stazionario per f su M ma non è interno a M. Come osservato in precedenza, i punti $(0,y,0)$, per ogni $y \geq 0$, sono di minimo assoluto per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 = y\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + z^2 - y$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(x^2 + 2z^2\right) e^{-y} - \lambda \left(x^2 + z^2 - y\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2xe^{-y} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -(x^2+2z^2)e^{-y} + \lambda \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 4ze^{-y} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + z^2 - y\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(e^{-y} - \lambda\right) = 0 \\ \lambda = \left(x^2 + 2z^2\right) e^{-y} \\ 2z\left(2e^{-y} - \lambda\right) = 0 \\ x^2 + z^2 = y. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(0,0,0,0)$, $(0,1,\pm1,2e^{-1})$, $(\pm1,1,0,e^{-1})$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,0,0)$, $(0,1,\pm1)$, $(\pm1,1,0)$. Abbiamo già osservato che $(0,0,0)$ è un punto di minimo assoluto per f su M. Inoltre, si ha che

$$f(0,1,\pm1) = 2e^{-1}, \qquad f(\pm1,1,0) = e^{-1}.$$

Quindi $(0,1,\pm 1)$ sono punti di massimo assoluto per f su M.

Resta da stabilire se $(\pm 1,1,0)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro per f su M. Facciamo uno studio locale di f in un intorno di questi punti. Confrontiamo f in questi punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $(1,1,0)$ e sia I un qualunque intorno di $(1,1,0)$. Presi i punti $(x,1,0)\in I\cap M$ con $0<x<1$, si ha che

$$f(x,1,0)-f(1,1,0)=\left(x^2-1\right)e^{-1}<0.$$

Presi ora i punti $(x,1,z)\in I\cap M$ con $x^2+z^2=1$, si ha che

$$f(x,1,z)-f(1,1,0)=\left(x^2+2z^2-1\right)e^{-1}=z^2e^{-1}\geq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $(1,1,0)$ contiene sia punti del tipo $(x,1,0)\in M$, per qualche $0<x<1$, che $(x,1,z)\in M$ con $x^2+z^2=1$, ne segue che $(1,1,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che $(-1,1,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M.

i) La funzione $f(x,y,z)=\frac{y^2-z^2}{1+x^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2\leq 4\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2<4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z)\in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z)=0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{2x(y^2-z^2)}{(1+x^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{2y}{1+x^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{2z}{1+x^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} y=0\\ z=0.\end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x,0,0)$ con $|x|<2$. Osserviamo che anche $(\pm 2,0,0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Si ha che

$f(x,0,0)=0$ per ogni $|x|\le 2$. Inoltre, fissato un punto $(x_0,0,0)$ con $|x_0|\le 2$ si ha che per ogni intorno I di questo punto esistono punti del tipo $(x,y,0)$ e $(x,0,z)$ appartenenti a $I\cap M$ tali che

$$f(x,0,z)<0<f(x,y,0).$$

Quindi i punti $(x,0,0)$ per ogni $|x|\le 2$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2=4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)=\frac{y^2-z^2}{1+x^2}-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-4\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=0$. Si ha che

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=-\dfrac{2x(y^2-z^2)}{(1+x^2)^2}-2\lambda x\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=\dfrac{2y}{1+x^2}-2\lambda y\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=-\dfrac{2z}{1+x^2}-2\lambda z\\[2mm] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=-\left(x^2+y^2+z^2-4\right).\end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=0\qquad\iff\qquad\begin{cases}-2x\left[\frac{y^2-z^2}{(1+x^2)^2}+\lambda\right]=0\\[2mm] 2y\left(\frac{1}{1+x^2}-\lambda\right)=0\\[2mm] -2z\left(\frac{1}{1+x^2}+\lambda\right)=0\\[2mm] x^2+y^2+z^2=4.\end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $(0,0,\pm 2,1)$, $(0,\pm 2,0,-1)$, $(\pm 2,0,0,0)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,0,\pm 2)$, $(0,\pm 2,0)$, $(\pm 2,0,0)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(\pm 2,0,0)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M. Inoltre si ha che

$$f(0,0,\pm 2)=-4,\qquad f(0,\pm 2,0)=4.$$

Quindi i punti $(0, \pm 2, 0)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $(0, 0, \pm 2)$ sono di minimo assoluto per f su M.

l) La funzione $f(x, y, z) = (1 + z^2)\, e^{-y^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 4 \le 8e^{-y^2 - z^2}\right\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che

$$(x, y, z) \in M \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |x| \le \sqrt{8e^{-y^2-z^2} - 4} \le 2, \\ y^2 + z^2 \le -\log\left[\frac{1}{8}(x^2 + 4)\right] \le \log 2. \end{cases}$$

Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 4 < 8e^{-y^2 - z^2}\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y\left(1 + z^2\right) e^{-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z\, e^{-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x, 0, 0)$ con $-2 < x < 2$. Osserviamo che anche $(\pm 2, 0, 0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Per stabilire se questi punti sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, determiniamo gli autovalori della matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \left(1 + z^2\right)\left(4y^2 - 2\right) e^{-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2\, e^{-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = -4yz\, e^{-y^2}.$$

Quindi per ogni $-2 < x < 2$ si ha che

$$\mathcal{H}_f(x, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono 0, -2, 2. Ne segue che i punti $(x, 0, 0)$ non sono né di massimo né di minimo per f.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2 + 4 = 8e^{-y^2-z^2}\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = \left(1 + z^2\right) e^{-y^2} - \lambda \left(x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = -2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = -2y(1 + z^2)e^{-y^2} - 16\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2ze^{-y^2} - 16\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -\left(x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda x = 0 \\ -2y\left[(1 + z^2)e^{-y^2} + 8\lambda\right] = 0 \\ 2z\left(e^{-y^2} - 8\lambda\right) = 0 \\ x^2 + 4 = 8e^{-y^2-z^2}. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $\left(0, 0, \pm\sqrt{\log 2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(0, \pm\sqrt{\log 2}, 0, -\frac{1}{16}\right)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm\sqrt{\log 2})$, $(0, \pm\sqrt{\log 2}, 0)$. Si ha che

$$f(\pm 2, 0, 0) = 1, \qquad f\left(0, 0, \pm\sqrt{\log 2}\right) = 1 + \log 2, \qquad f\left(0, \pm\sqrt{\log 2}, 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Quindi $(0, 0, \pm\sqrt{\log 2})$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0, \pm\sqrt{\log 2}, 0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

Resta da stabilire se i punti $(\pm 2, 0, 0)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, per f su M. Confrontiamo f in tali punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $(2, 0, 0)$ e sia I un qualunque intorno di $(2, 0, 0)$. Presi i punti $(x, y, 0) \in I \cap M$ con $y \neq 0$, si ha che

$$f(x, y, 0) - f(2, 0, 0) = e^{-y^2} - 1 < 0.$$

Presi i punti $(x, 0, z) \in I \cap M$, si ha che

$$f(x, 0, z) - f(2, 0, 0) = z^2 \geq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $(2, 0, 0)$ contiene sia punti del tipo $(x, y, 0) \in M$ con $y \neq 0$ che $(x, 0, z) \in M$, ne segue che $(2, 0, 0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che $(-2, 0, 0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M.

m) La funzione $f(x, y, z) = (1 + x^2)\, e^{-z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 \leq 0\right\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che $x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 = x^2 + (y^2 - 1)^2 + z^2 - 1$. Quindi

$$(x, y, z) \in M \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \left(y^2 - 1\right)^2 + z^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq 1, \ |y| \leq \sqrt{2}, \ |z| \leq 1.$$

Ne segue che $\|(x, y, z)\| \leq 2$. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

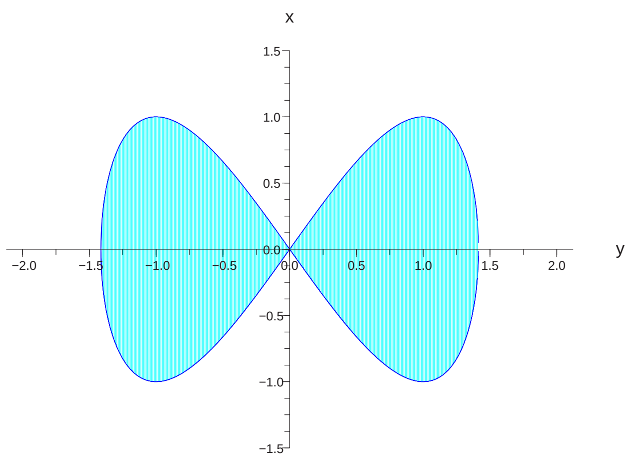

Fig. 20: Sezione dell'insieme M con il piano yx.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 < 0\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\, e^{-z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z\left(1+x^2\right)e^{-z^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0, y, 0)$ con $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$. Osserviamo che anche $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$ e $(0, 0, 0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Per stabilire se questi punti sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, determiniamo gli autovalori della matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2x\, e^{-z^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \left(1+x^2\right)\left(4z^2-2\right)e^{-z^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -4xz\, e^{-z^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0.$$

Quindi per ogni $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$, si ha che

$$\mathcal{H}_f(0,y,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono 2, 0, -2. Ne segue che i punti $(0, y, 0)$ con $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$, non sono né di massimo né di minimo per f.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 = 0\right\}.$$

Osserviamo che ∂M non è una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Infatti, in ogni intorno di $(0, 0, 0) \in \partial M$ si ha che ∂M non è il grafico di una funzione di classe C^1 di una delle tre variabili rispetto alle altre due. Più precisamente è l'unione dei grafici delle due funzioni

$$\varphi_{1,2}(x,y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - \left(y^2-1\right)^2}$$

che sono continue in $(0, 0)$ ma non differenziabili. Quindi il punto $(0, 0, 0)$ va trattato a parte facendo uno studio locale di f in un intorno di questo punto. Però $\partial M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Quindi essendo f di classe

C^∞, allora i punti di estremo su $\partial M \setminus \{(0,0,0)\}$ vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su $\partial M \setminus \{(0,0,0)\}$. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(1+z^2\right) e^{-y^2} - \lambda \left(x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x\, e^{-z^2} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -4\lambda y(y^2-1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -2z\left(1+x^2\right) e^{-z^2} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(e^{-z^2} - \lambda\right) = 0 \\ 4\lambda y(y^2-1) = 0 \\ -2z\left[\left(1+x^2\right) e^{-z^2} + \lambda\right] = 0 \\ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm 1, \pm 1, -\frac{1}{e}\right)$, $(\pm 1, \pm 1, 0, 1)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$, $(0, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1, 0)$. Si ha che

$$f\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right) = 1, \qquad f(0, \pm 1, \pm 1) = \frac{1}{e}, \qquad f(\pm 1, \pm 1, 0) = 2.$$

Quindi $(\pm 1, \pm 1, 0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0, \pm 1, \pm 1)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

Resta da stabilire se i punti $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$ e $(0,0,0)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, per f su M. Confrontiamo f in tali punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $(0,0,0)$ e sia I un qualunque intorno di $(0,0,0)$. Presi i punti $(0,y,z) \in I \cap M$ con $z \neq 0$, si ha che

$$f(0,y,z) - f(0,0,0) = e^{-z^2} - 1 < 0.$$

Presi i punti $(x,y,0) \in I \cap M$, si ha che

$$f(x,y,0) - f(0,0,0) = x^2 \geq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $(0,0,0)$ contiene sia punti del tipo $(0,y,z) \in M$ con $z \neq 0$ che $(x,y,0) \in M$, ne segue che $(0,0,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che i punti $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

n) La funzione $f(x,y,z) = -\frac{2x^2+z^2}{y^3}$ è di classe C^∞ su

$$\mathrm{dom}\,(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y \neq 0\right\}.$$

L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 \leq y^2 - 1\right\} \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$$

è chiuso e illimitato. Infatti, la superficie $x^2+z^2+1 = y^2$ è un'iperboloide a due falde con asse coincidente con l'asse y. Quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.

Osserviamo che se $(x,y,z) \in M$, cioè $x^2+z^2 \leq y^2-1$, è tale che $\|(x,y,z)\| \to +\infty$, allora necessariamente $|y| \to +\infty$ e

$$|f(x,y,z)| = \left| -\frac{2x^2+z^2}{y^3} \right| = \frac{2x^2+z^2}{|y|^3} \leq \frac{2(y^2-1)}{|y|^3}.$$

Ne segue che

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} f(x,y,z) = \lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} \left(-\frac{2x^2+z^2}{y^3} \right) = 0.$$

Quindi per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ \|(x,y,z)\| > R \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon,$$

cioè

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Proviamo che f ammette massimo e minimo su M. Osserviamo che f e M presentano una simmetria rispetto al piano xz. Infatti se $(x,y,z) \in M$, allora anche $(x,-y,z) \in M$ e $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare che f ammette massimo su M. Sia $(x_0,y_0,z_0) \in M$ tale che $f(x_0,y_0,z_0) > 0$. Un punto siffatto esiste (per esempio $(x,y,0)$ con $x,y < 0$). Poniamo $R_0 = \|(x_0,y_0,z_0)\| = x_0^2+y_0^2+z_0^2$. Evidentemente $R_0 > 0$.

Quindi preso $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0,y_0,z_0)$, esiste $R \geq R_0$ tale che

$$\begin{cases} (x,y,z) \in M \\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases} \implies f(x,y,z) < \varepsilon.$$

Poichè l'insieme $M\cap\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2\le R^2\Big\}$ è compatto e non vuoto (perchè contiene (x_0,y_0,z_0)), allora per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo su questo insieme. Quindi esiste $(x_1,y_1,z_1)\in M$ con $x_1^2+y_1^2+z_1^2\le R^2$ tale che

$$\begin{cases}(x,y,z)\in M\\ x^2+y^2+z^2\le R^2\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad f(x,y,z)\le f(x_1,y_1,z_1).$$

In particolare $f(x_0,y_0,z_0)\le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che

$$\begin{cases}(x,y,z)\in M\\ x^2+y^2+z^2> R^2\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad f(x,y,z)<\varepsilon<f(x_0,y_0,z_0)\le f(x_1,y_1,z_1).$$

Quindi per ogni $(x,y,z)\in M$ si ha che $f(x,y,z)\le f(x_1,y_1,z_1)$. Ne segue che f ammette massimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M)=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+z^2<y^2-1\Big\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z)\in\ int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z)=0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{4x}{y^3},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{3(2x^2+z^2)}{y^4},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{2z}{y^3}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z)=0\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ z=0.\end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0,y,0)$ con $|y|>1$. Osserviamo che anche $(0,\pm1,0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Si ha che $f(0,y,0)=0$ per ogni $|y|\ge 1$. Per stabilire se sono punti di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, facciamo uno studio locale di f in un intorno di questi punti. Consideriamo inizialmente i punti $(0,y_0,0)$ con $y_0\ge 1$. Se $(x,y,z)\in M$ ed appartiene ad un intorno I sufficentemente piccolo di $(0,y_0,0)$, per esempio $I\subseteq\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ y>0\Big\}$, allora $f(x,y,z)<0$. Quindi i punti $(0,y_0,0)$ con $y_0\ge 1$ sono di massimo locale per f su M. In modo analogo si dimostra che i punti $(0,y_0,0)$ con $y_0\le -1$ sono di minimo locale per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+z^2=y^2-1\Big\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2+z^2-y^2+1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = -\frac{2x^2+z^2}{y^3} - \lambda\left(x^2+z^2-y^2+1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = -\dfrac{4x}{y^3} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -\dfrac{3(2x^2+z^2)}{y^4} + 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -\dfrac{2z}{y^3} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2+z^2-y^2+1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad\iff\quad \begin{cases} -2x\left(\frac{2}{y^3}+\lambda\right) = 0 \\ 2\lambda y^5 = 3\left(2x^2+z^2\right) \\ -2z\left(\frac{1}{y^3}+\lambda\right) = 0 \\ x^2+z^2 = y^2-1. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono:

$$(0,\pm1,0,0), \quad \left(0,\sqrt{3},\pm\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(0,-\sqrt{3},\pm\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\left(\pm\sqrt{2},\sqrt{3},0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(\pm\sqrt{2},-\sqrt{3},0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,\pm1,0)$, $\left(0,\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3},0\right)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$ sono rispettivamente di massimo e di minimo locale per f su M. Inoltre si ha che

$$f\left(\pm\sqrt{2},\sqrt{3},0\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}, \qquad f\left(\pm\sqrt{2},-\sqrt{3},0\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3},$$

$$f\left(0,\sqrt{3},\pm\sqrt{2}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}, \qquad f\left(0,-\sqrt{3},\pm\sqrt{2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Quindi i punti $\left(\pm\sqrt{2},-\sqrt{3},0\right)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $\left(\pm\sqrt{2},\sqrt{3},0\right)$ sono di minimo assoluto per f su M.

Resta da stabilire se i punti $\left(0, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right)$ sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, per f su M. Confrontiamo f in tali punti con f in punti di M appartenenti ad un loro intorno. Consideriamo inizialmente il punto $\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ e sia I un qualunque intorno di $\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$. Presi i punti $(0, y, z) \in I \cap M$ con $z^2 = y^2 - 1$, si ha che

$$f(0, y, z) - f\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right) = -\frac{y^2 - 1}{y^3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Posto $\varphi(y) = -\frac{y^2-1}{y^3} + \frac{2}{9}\sqrt{3}$, si ha che φ è derivabile su $\left(0, \sqrt{3}\right]$ con $\varphi'(y) = -\frac{y^2-3}{y^4}$. Quindi $\varphi'(y) < 0$ per ogni $y \in \left(0, \sqrt{3}\right]$. Ne segue che φ è strettamente decrescente su $\left(0, \sqrt{3}\right]$ e quindi $\varphi(y) > \varphi(\sqrt{3}) = 0$ per ogni $y \in \left(0, \sqrt{3}\right)$. In altri termini

$$f(0, y, z) - f\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right) = -\frac{y^2 - 1}{y^3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} > 0.$$

Presi i punti $\left(x, \sqrt{3}, z\right) \in I \cap M$ con $x^2 + z^2 = 2$, si ha che

$$f\left(x, \sqrt{3}, z\right) - f\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 \leq 0.$$

Poichè ogni intorno I di $\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ contiene sia punti del tipo $(0, y, z) \in M$ con $z^2 = y^2 - 1$ che $\left(x, \sqrt{3}, 0\right) \in M$ con $x^2 + z^2 = 2$, ne segue che $\left(0, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo per f su M. In modo del tutto analogo si dimostra che i punti $\left(0, \sqrt{3}, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.