

# Integrali tripli: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo \* presentano un grado di difficoltà maggiore.

---

**Esercizio 1.** Calcolare i seguenti integrali tripli sugli insiemi specificati:

$$a) \int_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$\left[\frac{1}{8}\right]$

$$b) \int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < x + 2\}$$

$\left[\frac{64}{27}\sqrt{3}\pi\right]$

$$c) \int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 - y^2 + z^2 < 0, y > 0\}$$

$\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{2} - 6)\right]$

$$d) \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, dx \, dy \, dz,$$
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 < z\}$$

$\left[\pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{19}{60}\right)\right]$

$$e) \int_{\Omega} (x + z) \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$$

$\left[\frac{1}{12}\right]$

$$f) \int_{\Omega} x|z| \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < \frac{1}{2}x + 3\}$$

$\left[\frac{384}{5}\right]$

$$g) \int_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, 0 < y < 2z + 1, x^2 + y^2 + 4z^2 < 1 \right\}$$

$$\left[ \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} \right]$$

$$h) \int_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz,$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x < 0, 0 < z < x, x^2 + y^2 < 1, y > 0 \right\} \quad \left[ \frac{5}{48} \right]$$

$$i) \int_{\Omega} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2x, 0 < z < \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right\}$$

$$\left[ \pi - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right]$$

$$l) \int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz,$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x^2, x^2 - 2x + y^2 < 0, 0 < z < \sqrt{xy} \right\} \quad \left[ \frac{13}{24} \right]$$

$$m) \int_{\Omega} \log \sqrt{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + z^2 < e^2, z < x, 0 < y < \frac{1}{x^2 + z^2} \right\} \quad \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$n) \int_{\Omega} y^2 |z| \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2x, 0 < z < \frac{2}{x} \right\}$$

$$\left[ 2\pi - 3\sqrt{3} \right]$$

$$o) \int_{\Omega} |z| \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 - 1, 2x^2 + y^2 + z^2 < 2 \right\}$$

$$\left[ \frac{\sqrt{6}}{12} \pi \right]$$

$$p) \int_{\Omega} x^2 |y| \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < z < x + 1 \right\}$$

$$\left[ \frac{\pi}{48} + \frac{2}{45} \right]$$

### Svolgimento

I grafici degli insiemi di integrazione di questi esercizi si trovano sulla pagina web [http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici\\_integrali\\_tripli\\_esercizio\\_1.html](http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_integrali_tripli_esercizio_1.html)

a) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz$ , dove

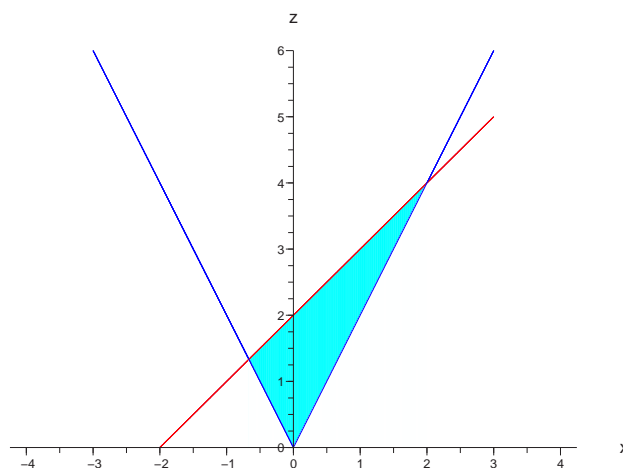
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è un cubo con spigoli paralleli agli assi coordinati. Poiché la funzione integranda  $f(x, y, z) = xyz$  è il prodotto di una funzione di  $x$ , una di  $y$  e una di  $z$ , si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz &= \left( \int_0^1 x \, dx \right) \left( \int_0^1 y \, dy \right) \left( \int_0^1 z \, dz \right) = \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

b) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz$ , dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < x + 2\}.$$



**Fig. 1:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

Osserviamo che  $\Omega$  è l'insieme dei punti compresi fra il semicono di equazione  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  e il piano di equazione  $z = x + 2$ . Integrando per fili paralleli all'asse  $z$ , si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz &= 2 \int_D \left[ \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} z \, dz \right] dx \, dy = \\ &= 2 \int_D \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} dx \, dy = \int_D [(x+2)^2 - 4(x^2+y^2)] dx \, dy, \end{aligned}$$

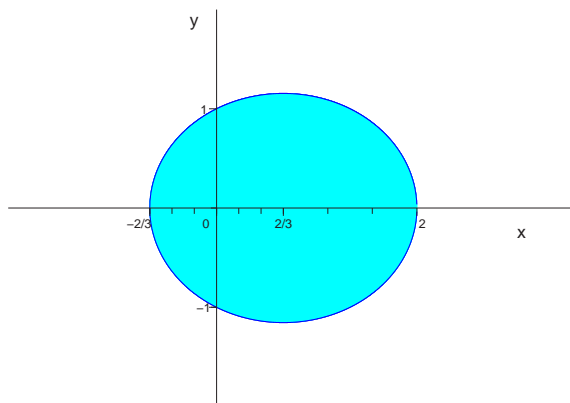
dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{x^2 + y^2} < x + 2 \right\}.$$

Osserviamo che

$$2\sqrt{x^2 + y^2} < x + 2 \iff \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} < 1.$$

Quindi  $D$  è l'insieme dei punti interni all'ellisse di equazione  $\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ .



**Fig. 2:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

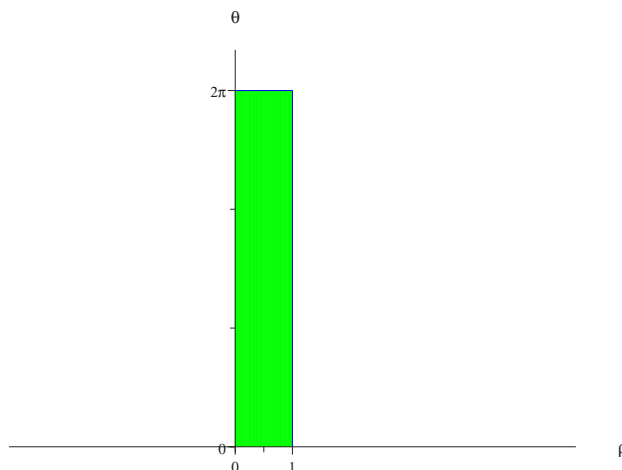
$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho \cos \vartheta \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \frac{8}{9}\sqrt{3}\rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}.$$



**Fig. 3:** L'insieme  $D'$  (in verde).

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz &= \int_D [(x+2)^2 - 4(x^2 + y^2)] \, dx \, dy = \\ &= \int_D (4 + 4x - 3x^2 - 4y^2) \, dx \, dy = 3 \int_D \left[ \frac{16}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}y^2 \right] \, dx \, dy = \\ &= \frac{128}{27} \sqrt{3} \int_{D'} (\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\vartheta = \end{aligned}$$

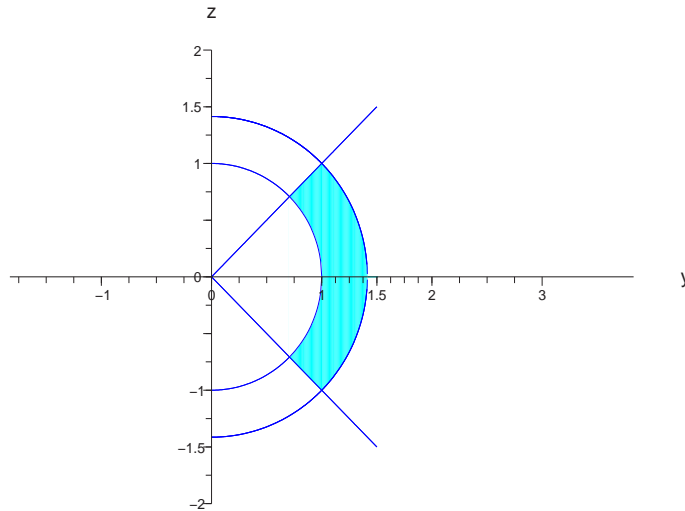
essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= \frac{128}{27} \sqrt{3} \left( \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) = \frac{256}{27} \sqrt{3} \pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{64}{27} \sqrt{3} \pi.$$

c) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ , dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 - y^2 + z^2 < 0, y > 0\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio compresa fra le sfere di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e il semicono  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ .



**Fig. 4:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $yz$  (in azzurro).

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse  $y$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = y \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, y, \vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 1 < \rho^2 + y^2 < 2 \\ \rho^2 - y^2 < 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $\Omega = \Phi(\Omega')$ , dove

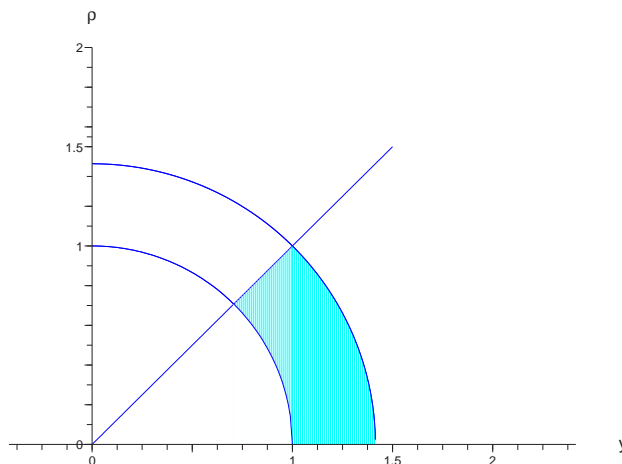
$$\Omega' = \left\{ (\rho, y, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \rho^2 + y^2 < 2, \quad 0 \leq \rho < y, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + z^2} dx dy dz = \int_{\Omega'} \rho \cos^2 \vartheta d\rho dy d\vartheta =$$

integrando per fili paralleli all'asse  $\vartheta$

$$\begin{aligned} &= \int_D \left( \int_0^{2\pi} \rho \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) d\rho dy = \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) \left( \int_D \rho d\rho dy \right) = \\ &= \left[ \frac{1}{2}(\vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_0^{2\pi} \left( \int_D \rho d\rho dy \right) = \pi \left( \int_D \rho d\rho dy \right), \end{aligned}$$



**Fig. 5:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

dove  $D = \{(y, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \rho^2 + y^2 < 2, 0 \leq \rho < y\}$ .

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Psi : \begin{cases} y = r \cos \varphi \\ \rho = r \sin \varphi, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Psi}(r, \varphi)| = r.$$

Allora

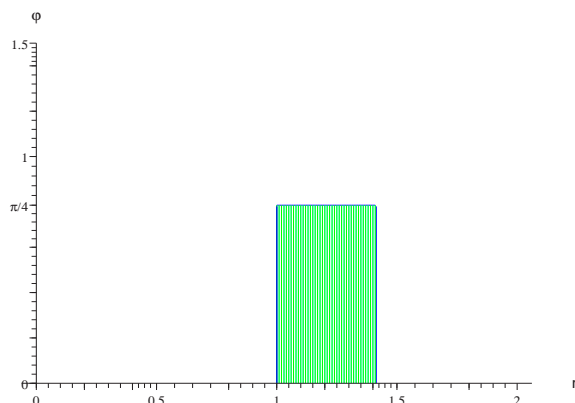
$$(y, \rho) \in D \iff \begin{cases} 1 < r < \sqrt{2} \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Psi(D')$ , dove

$$D' = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 1 < r < \sqrt{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $r$  e  $\varphi$  e la funzione integranda prodotto di una di  $r$  e una di  $\varphi$ , si ottiene

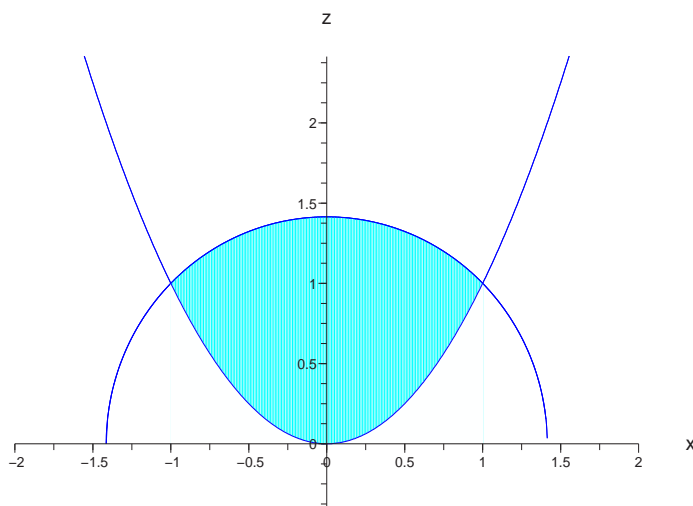
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + z^2} dx dy dz &= \pi \left( \int_D \rho d\rho dy \right) = \pi \left( \int_{D'} r^2 \sin \varphi dr d\varphi \right) = \\ &= \pi \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \right) \left( \int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr \right) = \pi \left[ -\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{2} - 6). \end{aligned}$$



**Fig. 6:** L'insieme  $D'$  (in verde).

d) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 < z\}.$$



**Fig. 7:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio compresa fra la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  e il paraboloido  $z = x^2 + y^2$ .



Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse  $z$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} \rho^2 + z^2 < 2 \\ z > \rho^2 \\ 0 < \rho < 1. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $\Omega = \Phi(\Omega')$ , dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi, \rho^2 < z < \sqrt{2 - \rho^2} \right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} (\rho^2 + z^2 - 1) \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse  $z$

$$\begin{aligned} &= \int_D \left[ \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} (\rho^2 + z^2 - 1) \rho \, dz \right] d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_D \rho \left[ (\rho^2 - 1) z + \frac{1}{3} z^3 \right]_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_D \rho \left[ (\rho^2 - 1) \sqrt{2 - \rho^2} + \frac{1}{3} (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (\rho^2 - 1) \rho^2 - \frac{1}{3} \rho^6 \right] d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_D \left[ \rho^3 \sqrt{2 - \rho^2} - \rho \sqrt{2 - \rho^2} + \frac{1}{3} \rho (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3} \rho^7 \right] d\rho \, d\vartheta, \end{aligned}$$

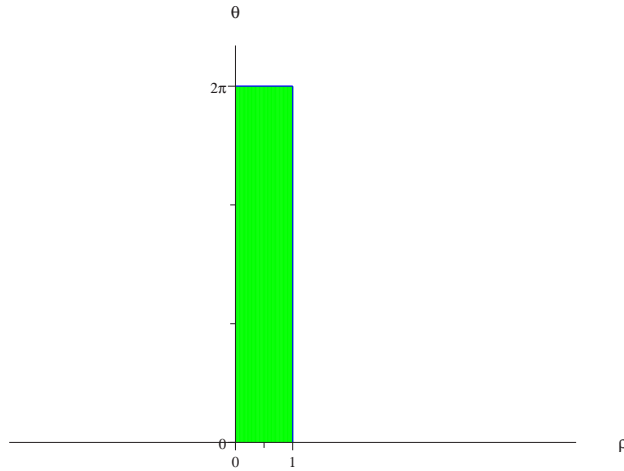
dove  $D = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ .

Essendo  $D$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \int_0^1 \left[ \rho^3 \sqrt{2 - \rho^2} - \rho \sqrt{2 - \rho^2} + \frac{1}{3} \rho (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3} \rho^7 \right] d\rho = \end{aligned}$$

integrando per parti il primo addendo

$$= 2\pi \left( \left[ -\frac{1}{3} \rho^2 (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 \rho (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho + \right.$$



**Fig. 8:** L'insieme  $D$  (in verde).

$$\begin{aligned}
 & - \left[ -\frac{1}{3} (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{5} (2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{6} \rho^6 + \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{24} \rho^8 \right]_0^1 = \\
 & = 2\pi \left( -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{5} (2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \sqrt{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) = \\
 & = 2\pi \left( -\frac{2}{15} + \frac{8}{15} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \sqrt{2} + \frac{1}{24} \right) = \pi \left( \frac{4}{15} \sqrt{2} - \frac{19}{60} \right).
 \end{aligned}$$

e) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} (x+z) dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1 \right\}.$$

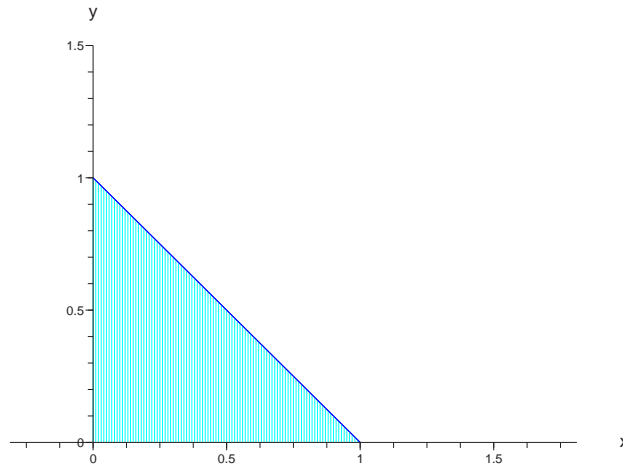
L'insieme  $\Omega$  è un tetraedro. Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (x+z) dx dy dz &= \int_D \left( \int_0^{1-x-y} (x+z) dz \right) dx dy = \int_D \left[ xz + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{1-x-y} dx dy = \\
 &= \int_D \left[ x(1-x-y) + \frac{1}{2} (1-x-y)^2 \right] dx dy,
 \end{aligned}$$

dove  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \right\}$ .

Essendo  $D$   $y$ -semplice, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (x+z) dx dy dz &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left[ x(1-x-y) + \frac{1}{2} (1-x-y)^2 \right] dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left[ x(1-x)y - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{6} (1-x-y)^3 \right]_0^{1-x} dx =
 \end{aligned}$$



**Fig. 9:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^3 \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}(1-x)^3 \right] dx = \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

f) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} x|z| dx dy dz$ , dove

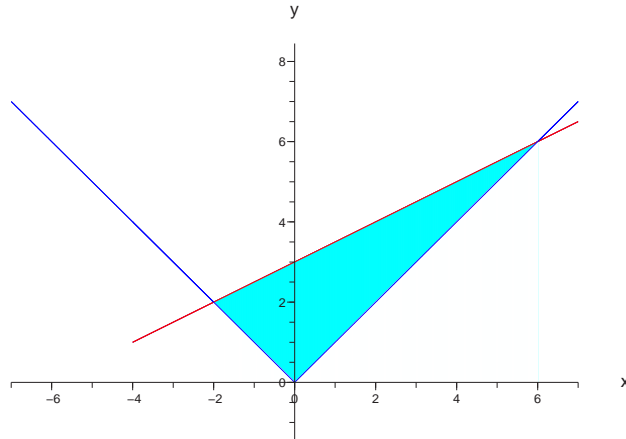
$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < \frac{1}{2}x + 3 \right\}.$$

Osserviamo che  $\Omega$  è l'insieme dei punti compresi fra il semicono di equazione  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$  e il piano di equazione  $y = \frac{1}{2}x + 3$ . Osserviamo che sia la funzione integranda  $f(x, y, z) = x|z|$  che l'insieme  $\Omega$  presentano una simmetria rispetto al piano  $xy$ . Infatti, se  $(x, y, z) \in \Omega$ , allora anche  $(x, y, -z) \in \Omega$  e  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ . Ne segue che

$$\int_{\Omega} x|z| dx dy dz = 2 \int_A xz dx dy dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < \frac{1}{2}x + 3, z > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \sqrt{y^2 - x^2}, |x| < y < \frac{1}{2}x + 3 \right\}. \end{aligned}$$



**Fig. 10:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $xy$  (in azzurro).

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x|z| \, dx \, dy \, dz &= 2 \int_A xz \, dx \, dy \, dz = 2 \int_D \left( \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} xz \, dz \right) dx \, dy = \\ &= 2 \int_D \left[ \frac{1}{2} xz^2 \right]_0^{\sqrt{y^2-x^2}} dx \, dy = \int_D x (y^2 - x^2) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y < \frac{1}{2}x + 3 \right\} = D_1 \cup D_2,$$

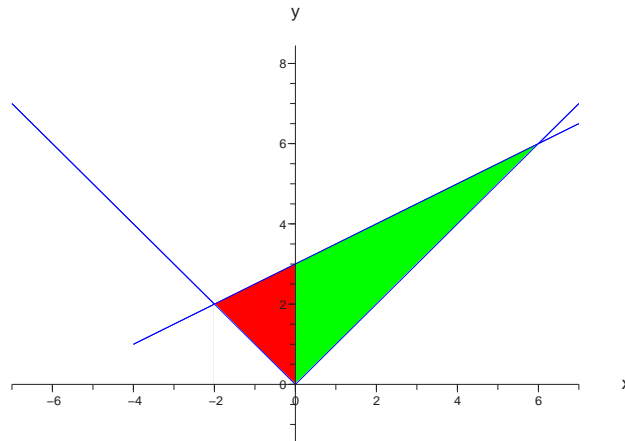
con

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 0, -x < y < \frac{1}{2}x + 3 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 6, x < y < \frac{1}{2}x + 3 \right\}.$$

Essendo  $D_1$  e  $D_2$   $y$ -semplici, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x|z| \, dx \, dy \, dz &= \int_D x (y^2 - x^2) \, dx \, dy = \\ &= \int_{D_1} x (y^2 - x^2) \, dx \, dy + \int_{D_2} x (y^2 - x^2) \, dx \, dy = \\ &= \int_{-2}^0 \left( \int_{-x}^{\frac{1}{2}x+3} (xy^2 - x^3) \, dy \right) dx + \int_0^6 \left( \int_x^{\frac{1}{2}x+3} (xy^2 - x^3) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{-2}^0 \left[ \frac{1}{3} xy^3 - x^3 y \right]_{-x}^{\frac{1}{2}x+3} dx + \int_0^6 \left[ \frac{1}{3} xy^3 - x^3 y \right]_x^{\frac{1}{2}x+3} dx = \end{aligned}$$



**Fig. 11:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_1$  in rosso e  $D_2$  in verde.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^0 \left[ \frac{1}{3}x \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - x^3 \left( \frac{1}{2}x + 3 \right) + \frac{1}{3}x^4 - x^4 \right] dx + \\
 &+ \int_0^6 \left[ \frac{1}{3}x \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - x^3 \left( \frac{1}{2}x + 3 \right) - \frac{1}{3}x^4 + x^4 \right] dx = \\
 &= \int_{-2}^0 \left( -\frac{9}{8}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x \right) dx + \int_0^6 \left( \frac{5}{24}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x \right) dx = \\
 &= \left[ -\frac{9}{40}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{1}{24}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^6 = \frac{384}{5}.
 \end{aligned}$$

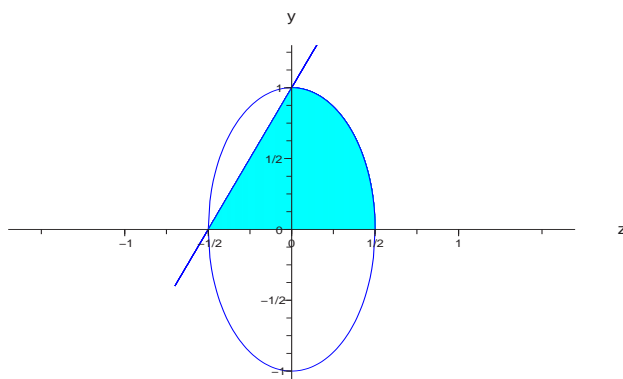
g) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, 0 < y < 2z + 1, x^2 + y^2 + 4z^2 < 1 \right\}.$$

Osserviamo che  $\Omega$  è l'insieme dei punti compresi fra l'ellissoide di equazione  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  e i piani di equazione  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = 2z + 1$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz &= 2 \int_D \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2-4z^2}} x \, dx \right) dy \, dz = \\
 &= 2 \int_D \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-y^2-4z^2}} dy \, dz = \int_D (1 - y^2 - 4z^2) dy \, dz,
 \end{aligned}$$



**Fig. 12:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $zy$  (in azzurro).

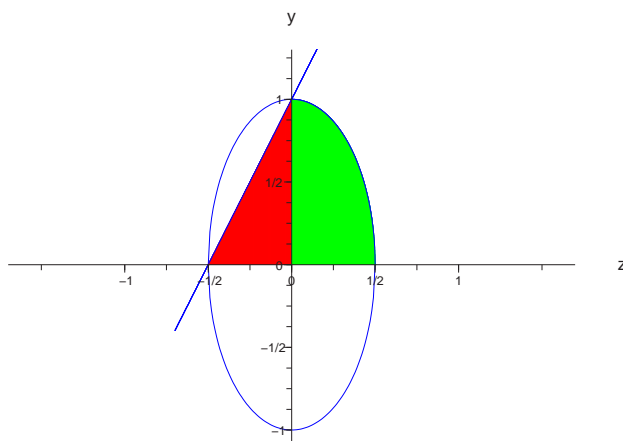
dove

$$D = \left\{ (z, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2z + 1, y^2 + 4z^2 < 1 \right\} = D_1 \cup D_2,$$

con

$$D_1 = \left\{ (z, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < z \leq 0, 0 < y < 2z + 1 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (z, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4z^2 < 1, y, z > 0 \right\}.$$



**Fig. 13:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_1$  in rosso e  $D_2$  in verde.

Quindi si ha che

$$\int_{\Omega} 2x \, dx \, dy \, dz = \int_D (1 - y^2 - 4z^2) \, dy \, dz =$$

$$= \int_{D_1} (1 - y^2 - 4z^2) dy dz + \int_{D_2} (1 - y^2 - 4z^2) dy dz.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali. Essendo  $D_1$   $y$ -semplice, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{D_1} (1 - y^2 - 4z^2) dy dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left[ \int_0^{2z+1} (1 - y^2 - 4z^2) dy \right] dz = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left[ (1 - 4z^2) y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{2z+1} dz = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( -\frac{32}{3} z^3 - 8z^2 + \frac{2}{3} \right) dz = \\ &= \left[ -\frac{8}{3} z^4 - \frac{8}{3} z^3 + \frac{2}{3} z \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Essendo  $D_2$  la parte del I quadrante compresa nell'ellisse di equazione  $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ , passiamo in coordinate ellittiche nel piano  $zy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} z = \frac{1}{2} \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \frac{1}{2} \rho.$$

Allora

$$(z, y) \in D_2 \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_2 = \Phi(D'_2)$ , dove

$$D'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{D_2} (1 - y^2 - 4z^2) dy dz = \int_{D'_2} \frac{1}{2} \rho (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

ed essendo  $D'_2$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

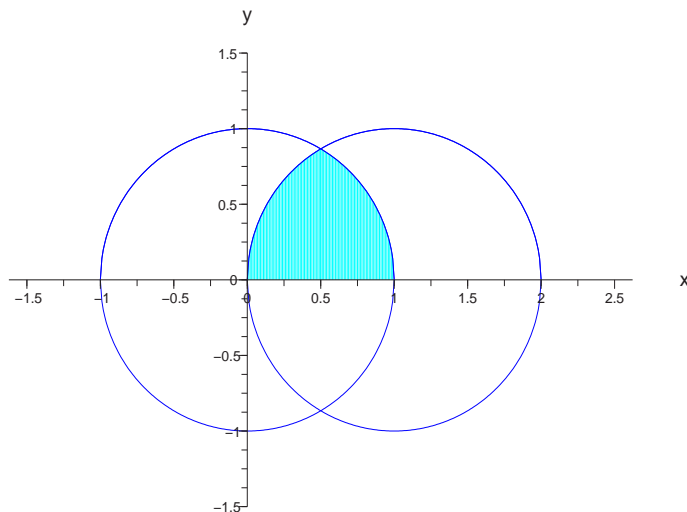
$$= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \right) \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right] = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Omega} 2x dx dy dz = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}.$$

h) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} y dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x < 0, 0 < z < x, x^2 + y^2 < 1, y > 0 \right\}.$$



**Fig. 14:** Proiezione dell'insieme  $\Omega$  sul piano  $xy$  (in azzurro).

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio compresa fra i cilindri di equazione  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  e i piani  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $z = x$ .

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse  $z$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, z)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ \rho < 2 \cos \vartheta \\ 0 < z < \rho \cos \vartheta \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $\Omega = \Phi(\Omega')$ , dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < 1, \rho < 2 \cos \vartheta, 0 < z < \rho \cos \vartheta \right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} \rho \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse  $z$

$$= \int_D \left( \int_0^{\rho \cos \vartheta} \rho^2 \sin \vartheta \, dz \right) d\rho \, d\vartheta = \int_D \rho^2 \sin \vartheta [z]_0^{\rho \cos \vartheta} d\rho \, d\vartheta =$$

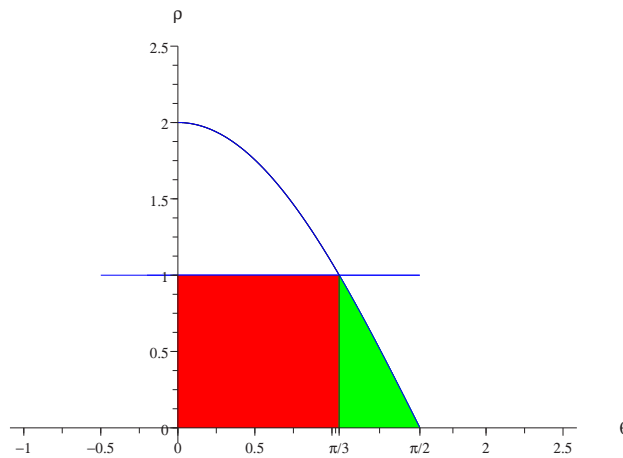


$$= \int_D \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta,$$

dove  $D = D_1 \cup D_2$ , con

$$D_1 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{3} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < 2 \cos \vartheta \right\}.$$



**Fig. 15:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_1$  in rosso e  $D_2$  in verde.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz &= \int_D \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_{D_1} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta + \int_{D_2} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo sia  $D_1$  che  $D_2$   $\rho$ -semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione in  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left( \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left( \int_0^{\pi/3} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \left[ \int_0^{2 \cos \vartheta} \rho^3 \, d\rho \right] \, d\vartheta = \\ &= \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{2 \cos \vartheta} \, d\vartheta = \\ &= \frac{3}{32} + 4 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^5 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{32} + 4 \left[ -\frac{1}{6} \cos^6 \vartheta \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{5}{48}. \end{aligned}$$

i) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy dz$ , dove

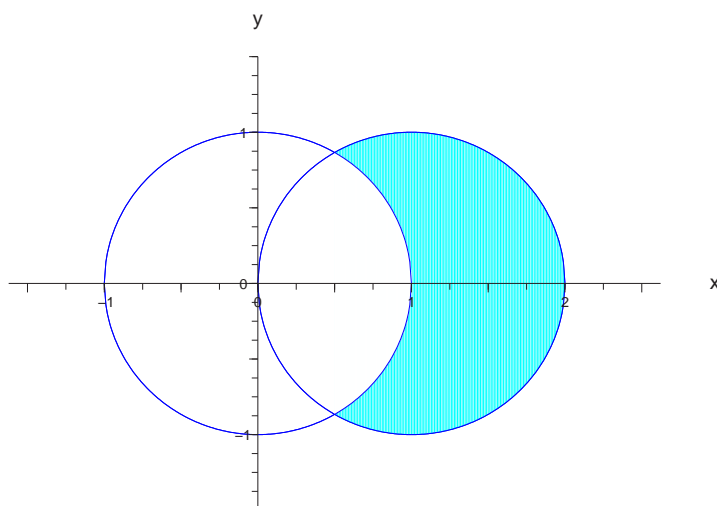
$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2x, 0 < z < \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , interna al cilindro di equazione  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  e delimitata dal piano  $z = 0$  e dal grafico della funzione  $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_D \left( \int_0^{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dz \right) dx dy = \int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy,$$

dove  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2x \right\}$ .



**Fig. 16:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

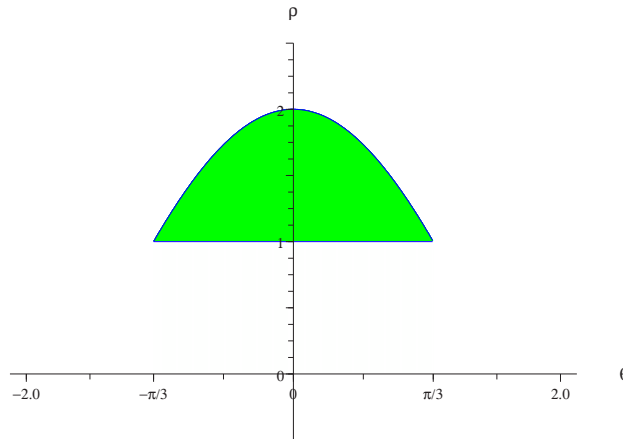
$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 1 < \rho < 2 \cos \vartheta \\ -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}, 1 < \rho < 2 \cos \vartheta \right\}.$$



**Fig. 17:** L'insieme  $D'$  (in verde).

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy = \int_{D'} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \rho d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'$   $\rho$ -semplice si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \rho d\rho \right) d\vartheta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{2 \cos \vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} (4 \cos^2 \vartheta - 1) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4 \sin^2 \vartheta - \tan^2 \vartheta) d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo  $\int \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta) + c$  e  $\int \tan^2 \vartheta d\vartheta = \tan \vartheta - \vartheta + c$ , si ottiene

$$= \frac{1}{2} \left[ 2(\vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta) - \tan \vartheta + \vartheta \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

l) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} 2z dx dy dz$ , dove

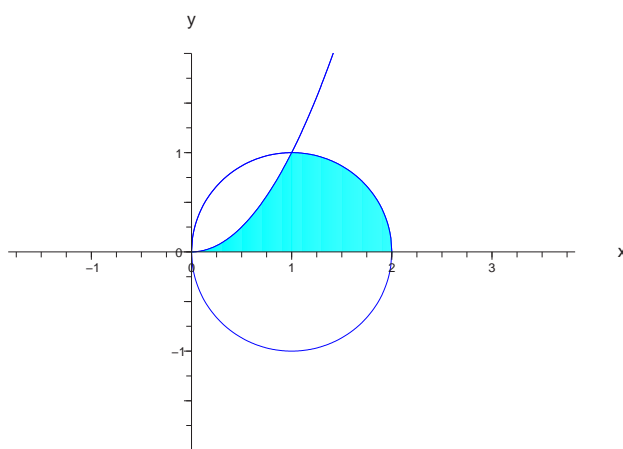
$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x^2, x^2 - 2x + y^2 < 0, 0 < z < \sqrt{xy} \right\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , interna al cilindro di equazione  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  e delimitata dai piani  $y = 0$  e  $z = 0$  e dai grafici delle funzioni  $g(x, y) = \sqrt{xy}$  e  $h(x, z) = x^2$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz = \int_D \left( \int_0^{\sqrt{xy}} 2z \, dz \right) dx \, dy = \int_D [z^2]_0^{\sqrt{xy}} dx \, dy = \int_D xy \, dx \, dy,$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2, x^2 - 2x + y^2 < 0, x > 0\}$ .



**Fig. 18:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Osserviamo che  $D = D_1 \cup D_2$ , dove

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y < x^2\},$$

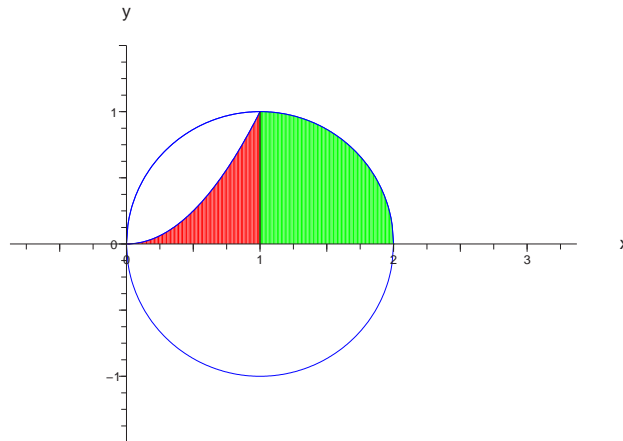
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 0 < y < \sqrt{2x - x^2}\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz = \int_D xy \, dx \, dy = \int_{D_1} xy \, dx \, dy + \int_{D_2} xy \, dx \, dy =$$

essendo sia  $D_1$  che  $D_2$   $y$ -semplici, si ottiene

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \right) dx =$$



**Fig. 19:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_1$  in rosso e  $D_2$  in verde.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left[ \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

m) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} \log \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + z^2 < e^2, z < x, 0 < y < \frac{1}{x^2 + z^2} \right\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione  $x^2 + z^2 = 1$ , interna al cilindro di equazione  $x^2 + z^2 = e^2$  e delimitata dai piani  $y = 0$  e  $x = z$  e dal grafico della funzione  $g(x, z) = \frac{1}{x^2 + z^2}$ .

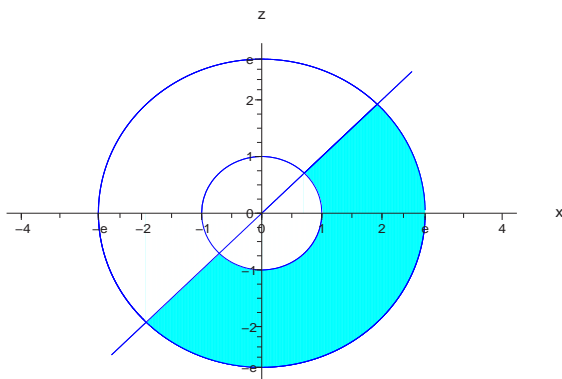
Integrando per fili paralleli all'asse  $y$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \log \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz &= \int_D \left( \int_0^{\frac{1}{x^2+z^2}} \log \sqrt{x^2 + z^2} dy \right) dx dz = \\ &= \int_D \frac{\log \sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + z^2} dx dz, \end{aligned}$$

dove  $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + z^2 < e^2, z < x\}$ .

Passiamo in coordinate polari nel piano  $xz$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$



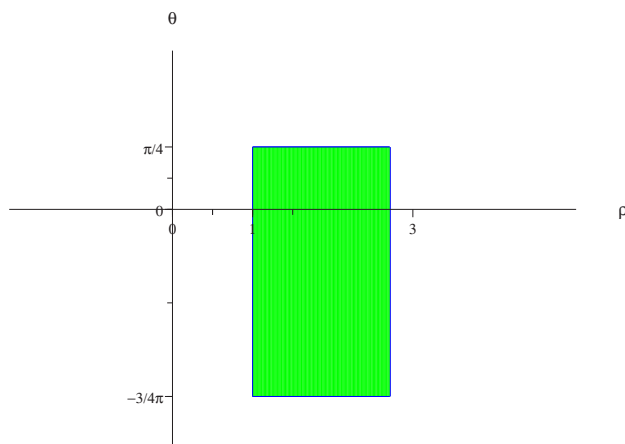
**Fig. 20:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Si ha che

$$(x, z) \in D \iff \begin{cases} 1 < \rho < e \\ -\frac{3}{4}\pi < \vartheta < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \rho < e, -\frac{3}{4}\pi < \vartheta < \frac{\pi}{4} \right\}.$$



**Fig. 21:** L'insieme  $D'$  (in verde).

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} \log \sqrt{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \int_D \frac{\log \sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + z^2} \, dx \, dz = \int_{D'} \frac{\log \rho}{\rho} \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= \left( \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \right) \left( \int_1^e \frac{\log \rho}{\rho} d\rho \right) = \pi \left[ \frac{1}{2} \log^2 \rho \right]_1^e = \frac{\pi}{2}.$$

n) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} y^2 |z| dx dy dz$ , dove

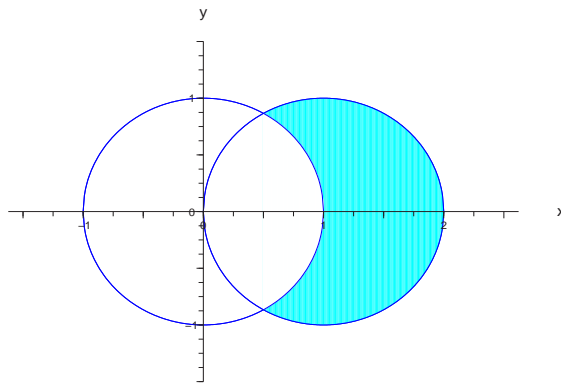
$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2x, 0 < z < \frac{2}{x} \right\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , interna al cilindro di equazione  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  e delimitata dal piano  $z = 0$  e dal grafico della funzione  $g(x, y) = \frac{2}{x}$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} y^2 |z| dx dy dz &= \int_{\Omega} y^2 z dx dy dz = \int_D \left( \int_0^{\frac{2}{x}} y^2 z dz \right) dx dy = \\ &= \int_D y^2 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\frac{2}{x}} dx dy = 2 \int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \end{aligned}$$

dove  $D = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2x, x > 0 \right\}$ .



**Fig. 22:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

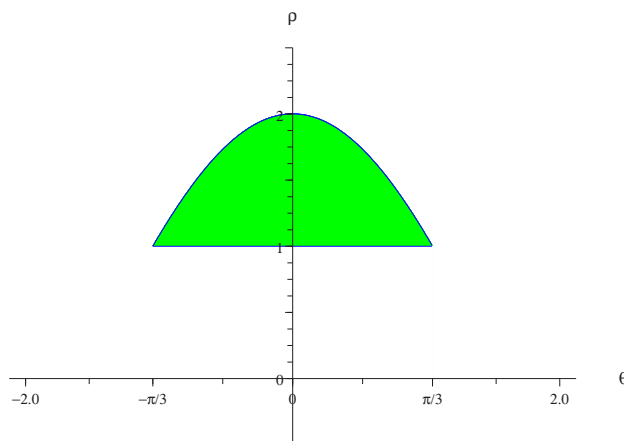
$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 1 < \rho < 2 \cos \vartheta \\ -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}, 1 < \rho < 2 \cos \vartheta \right\}.$$



**Fig. 23:** L'insieme  $D'$  (in verde).

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} y^2 |z| dx dy dz = 2 \int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy = 2 \int_{D'} \rho \tan^2 \vartheta d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'$   $\rho$ -semplice si ottiene

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_1^{2 \cos \vartheta} \rho \tan^2 \vartheta d\rho \right) d\vartheta = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 \vartheta \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \right]_1^{2 \cos \vartheta} d\vartheta = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 \sin^2 \vartheta - \tan^2 \vartheta) d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo  $\int \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta) + c$  e  $\int \tan^2 \vartheta d\vartheta = \tan \vartheta - \vartheta + c$ , si ottiene

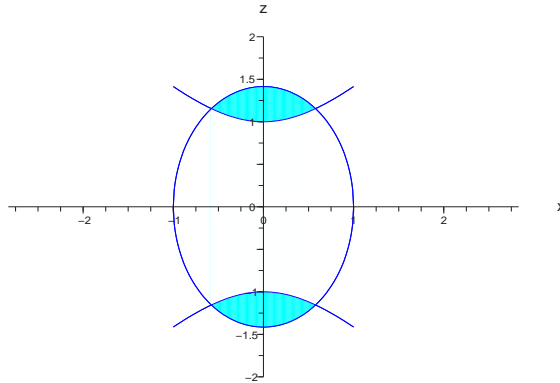
$$= 2 \left[ 2(\vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta) - \tan \vartheta + \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$



o) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} |z| dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 - 1, 2x^2 + y^2 + z^2 < 2 \right\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è la parte dello spazio compresa fra l'ellissoide di equazione  $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$  e l'iperboloide a due falde di equazione  $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ .



**Fig. 24:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

Osserviamo che sia la funzione integranda  $f(x, y, z) = |z|$  che l'insieme  $\Omega$  presentano una simmetria rispetto al piano  $xy$ . Infatti, se  $(x, y, z) \in \Omega$ , allora anche  $(x, y, -z) \in \Omega$  e  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ . Ne segue che

$$\int_{\Omega} |z| dx dy dz = 2 \int_A z dx dy dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 - 1, 2x^2 + y^2 + z^2 < 2, z > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + 1} < z < \sqrt{2 - 2x^2 - y^2} \right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z| dx dy dz &= 2 \int_A z dx dy dz = 2 \int_D \left( \int_{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}^{\sqrt{2 - 2x^2 - y^2}} z dz \right) dx dy = \\ &= 2 \int_D \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}^{\sqrt{2 - 2x^2 - y^2}} dx dy = \int_D (1 - 3x^2 - 2y^2) dx dy, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2 + 1} < \sqrt{2 - 2x^2 - y^2} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Essendo  $D$  la parte del piano  $xy$  compresa nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ , passiamo in coordinate ellittiche nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

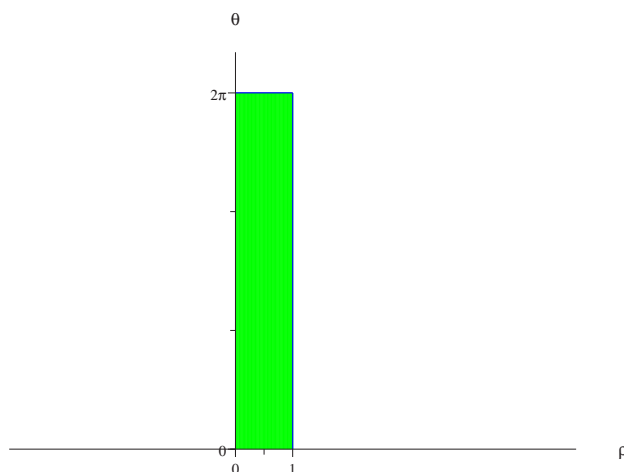
$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \vartheta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \frac{\sqrt{6}}{6} \rho.$$

Si ha che

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}.$$



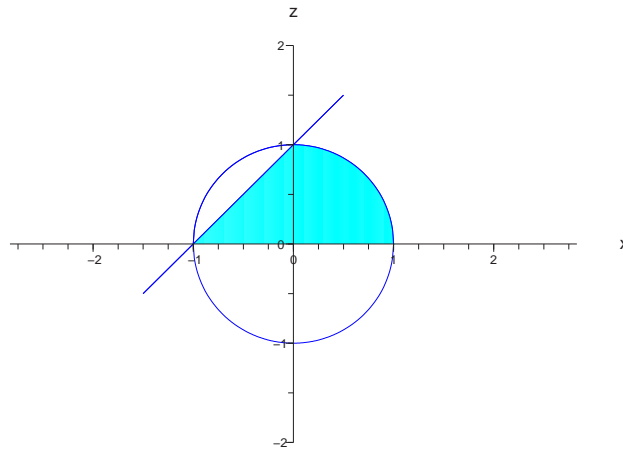
**Fig. 25:** L'insieme  $D'$  (in verde).

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} |z| dx dy dz = \int_D (1 - 3x^2 - 2y^2) dx dy = \frac{\sqrt{6}}{6} \int_{D'} \rho (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{12} \pi.$$



**Fig. 26:** Sezione dell'insieme  $\Omega$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

p) Consideriamo l'integrale  $\int_{\Omega} x^2|y| dx dy dz$ , dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < z < x + 1 \right\}.$$

Osserviamo che  $\Omega$  è l'insieme dei punti compresi fra la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e i piani di equazione  $z = 0$  e  $z = x + 1$ . Inoltre, sia la funzione integranda  $f(x, y, z) = x^2|y|$  che l'insieme  $\Omega$  presentano una simmetria rispetto al piano  $xz$ . Infatti, se  $(x, y, z) \in \Omega$ , allora anche  $(x, -y, z) \in \Omega$  e  $f(x, -y, z) = f(x, y, z)$ . Ne segue che

$$\int_{\Omega} x^2|y| dx dy dz = 2 \int_A x^2 y dx dy dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < z < x + 1, y > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < \sqrt{1 - x^2 - z^2}, 0 < z < x + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse  $y$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2|y| dx dy dz &= 2 \int_A x^2 y dx dy dz = 2 \int_D \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} x^2 y dy \right) dx dz = \\ &= 2 \int_D x^2 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dx dz = \int_D x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz, \end{aligned}$$

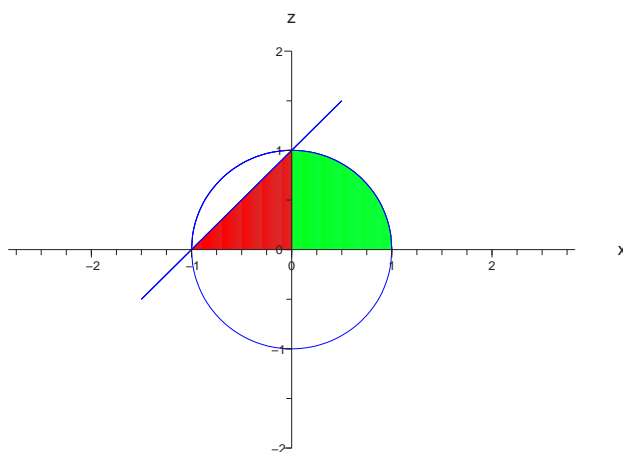
dove

$$D = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 < 1, 0 < z < x + 1 \right\} = D_1 \cup D_2,$$

con

$$D_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 0, 0 < z < x + 1\},$$

$$D_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 < 1, x, z > 0\}.$$



**Fig. 27:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_1$  in rosso e  $D_2$  in verde.

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2 |y| dx dy dz &= \int_D x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz = \\ &= \int_{D_1} x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz + \int_{D_2} x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali. Essendo  $D_1$   $z$ -semplice, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{D_1} x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz &= \int_{-1}^0 \left[ \int_0^{x+1} x^2 (1 - x^2 - z^2) dz \right] dx = \\ &= \int_{-1}^0 x^2 \left[ (1 - x^2)z - \frac{1}{3}z^3 \right]_0^{x+1} dx = \int_{-1}^0 x^2 \left[ (1 - x^2)(x + 1) - \frac{1}{3}(x + 1)^3 \right] dx = \\ &= \int_{-1}^0 \left( -\frac{4}{3}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 \right) dx = \left[ -\frac{2}{9}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{9}x^3 \right]_{-1}^0 = \frac{2}{45}. \end{aligned}$$

Essendo  $D_2$  la parte del  $I$  quadrante compresa nella circonferenza di equazione  $x^2 + z^2 = 1$ , passiamo in coordinate polari nel piano  $xz$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, z) \in D_2 \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_2 = \Phi(D'_2)$ , dove

$$D'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{D_2} x^2 (1 - x^2 - z^2) dx dz = \int_{D'_2} \rho^3 \cos^2 \vartheta (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

ed essendo  $D'_2$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5) d\rho \right] = \left[ \frac{1}{2} (\vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{48}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Omega} x^2 |y| dx dy dz = \frac{\pi}{48} + \frac{2}{45}.$$

**Esercizio 2.** Calcolare il volume dei seguenti insiemi:

$$a) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1 \right\} \quad \left[ \frac{1}{6} \right]$$

$$b) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 < \pi^2, x^2 + y^2 > \frac{\pi^2}{4}, x > 0, 0 < z < x \cos y \right\} \quad [6]$$

$$c) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 3x^2 + 5y^2, z < 8 - x^2 - 3y^2 \right\} \quad [4\pi\sqrt{2}]$$

$$d) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 3|z|, x^2 + z^2 > 1, z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}|z| \right\} \quad [16]$$

$$e) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, x^2 + y^2 - 2x < 0 \right\} \quad \left[ \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9} \right]$$

$$f) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{3x^2 + 3y^2}, x^2 + y^2 + z^2 < 2 \right\} \quad \left[ \frac{2}{3}\pi (\sqrt{6} - 2) \right]$$

$$g) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2 \right\} \quad \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$h) E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y^2 + z^2 < x < 1 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2 \right\} \quad [3\pi]$$

### Svolgimento

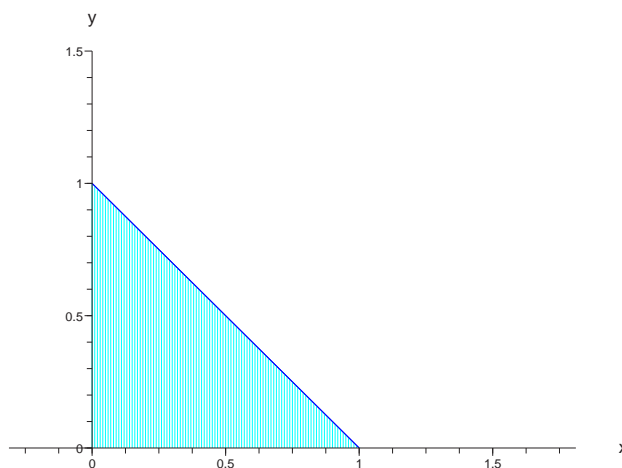
I grafici degli insiemi di integrazione di questi esercizi si trovano sulla pagina web [http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici\\_integrali\\_tripoli\\_esercizio\\_2.html](http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_integrali_tripoli_esercizio_2.html)

a) Consideriamo l'insieme  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$ .

L'insieme  $E$  è un tetraedro. Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E) = \int_E dx dy dz = \int_D \left( \int_0^{1-x-y} dz \right) dx dy = \int_D (1-x-y) dx dy,$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\}$ .



**Fig. 28:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Essendo  $D$   $y$ -semplice, si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_D (1-x-y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[ (1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3}(1-x)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 < \pi^2, x^2 + y^2 > \frac{\pi^2}{4}, x > 0, 0 < z < x \cos y \right\}.$$

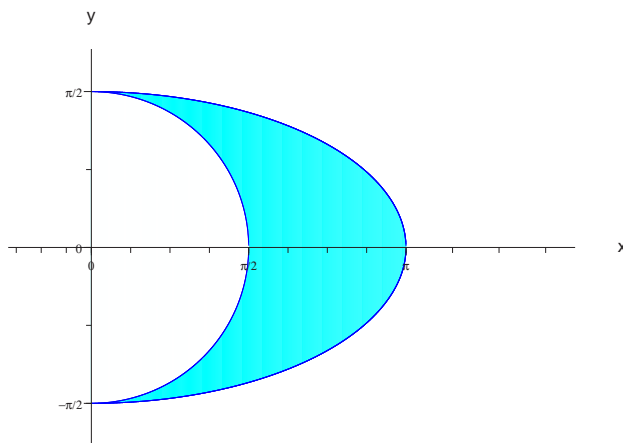
L'insieme  $E$  è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$ , interna al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = \pi^2$  e delimitata dai piani  $x = 0$  e  $z = 0$  e dal grafico della funzione  $g(x, y) = x \cos y$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E) = \int_E dx dy dz = \int_D \left( \int_0^{x \cos y} dz \right) dx dy = \int_D x \cos y dx dy,$$

dove

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < \pi^2, x^2 + y^2 > \frac{\pi^2}{4}, x > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2} < x < \sqrt{\pi^2 - 4y^2} \right\}. \end{aligned}$$



**Fig. 29:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Essendo  $D$   $x$ -semplice, si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_D x \cos y dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2}}^{\sqrt{\pi^2 - 4y^2}} x \cos y dx \right) dy = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2}}^{\sqrt{\pi^2 - 4y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{4} \pi^2 - 3y^2 \right) \cos y dy = \\ &= \frac{3}{8} \pi^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy - \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos y dy = \end{aligned}$$



integrando per parti il secondo integrale

$$= \frac{3}{8}\pi^2 \left[ \sin y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2} \left( \left[ y^2 \sin y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y \sin y \, dy \right) =$$

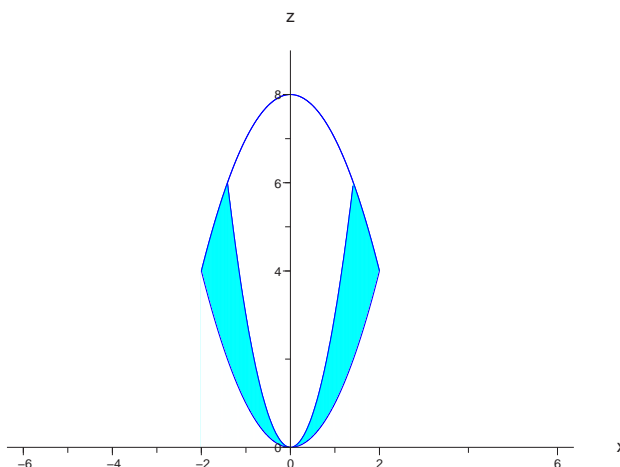
procedendo ancora con l'integrazione per parti

$$= \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2 + 3 \left( \left[ -y \cos y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy \right) = 3 \left[ \sin y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

c) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 3x^2 + 5y^2, z < 8 - x^2 - 3y^2 \right\}.$$

L'insieme  $E$  è la parte dello spazio compresa fra i tre paraboloidi di equazione  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 3x^2 + 5y^2$  e  $z = 8 - x^2 - 3y^2$ .



**Fig. 30:** Sezione dell'insieme  $E$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

Osserviamo che  $E = E_1 \setminus E_2$ , dove

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 8 - x^2 - 3y^2 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 5y^2 \leq z < 8 - x^2 - 3y^2 \right\}.$$

Ne segue che  $m(E) = m(E_1) - m(E_2)$ . Calcoliamo separatamente i volumi di  $E_1$  ed  $E_2$ . Consideriamo inizialmente  $E_1$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E_1) = \int_{D_1} dx dy dz = \int_{D_1} \left( \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-3y^2} dz \right) dx dy = 2 \int_{D_1} (4 - x^2 - 2y^2) dx dy,$$

dove  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 4\}$ . Essendo  $D_1$  l'insieme dei punti del piano  $xy$  compresi nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , passiamo in coordinate ellittiche nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = 2\rho \cos \vartheta \\ y = \sqrt{2}\rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = 2\sqrt{2}\rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_1 \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_1 = \Phi(D'_1)$ , dove

$$D'_1 = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi\}.$$

Ne segue che

$$m(E_1) = 2 \int_{D_1} (4 - x^2 - 2y^2) dx dy = 16\sqrt{2} \int_{D'_1} \rho (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'_1$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= 16\sqrt{2} \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right] = 32\pi\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = 8\pi\sqrt{2}.$$

Consideriamo ora  $E_2$ . Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E_2) = \int_{D_2} dx dy dz = \int_{D_2} \left( \int_{3x^2+5y^2}^{8-x^2-3y^2} dz \right) dx dy = 4 \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dx dy,$$

dove  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 2\}$ . Essendo  $D_2$  l'insieme dei punti del piano  $xy$  compresi nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , passiamo in coordinate ellittiche nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \sqrt{2}\rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \sqrt{2}\rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_2 \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_2 = \Phi(D'_2)$ , dove

$$D'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E_2) = 4 \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dx dy = 8\sqrt{2} \int_{D'_2} \rho (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'_2$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= 8\sqrt{2} \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right] = 16\pi\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = 4\pi\sqrt{2}.$$

In conclusione si ha che  $m(E) = m(E_1) - m(E_2) = 4\pi\sqrt{2}$ .

d) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 3|z|, x^2 + z^2 > 1, z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}|z| \right\}.$$

Osserviamo che l'insieme  $E$  è simmetrico rispetto al piano  $xy$ . Infatti, se  $(x, y, z) \in E$ , allora anche  $(x, y, -z) \in E$ . Quindi  $m(E) = 2m(E_1)$ , dove

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 3z, x^2 + z^2 > 1, z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}z \right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse  $y$  si ottiene

$$m(E) = 2m(E_1) = 2 \int_{E_1} dx dy dz = 2 \int_D \left( \int_0^{3z} dy \right) dx dz = 6 \int_D z dx dz,$$

dove  $D = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 > 1, z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}z, z > 0 \right\}$ . Osserviamo che  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , dove

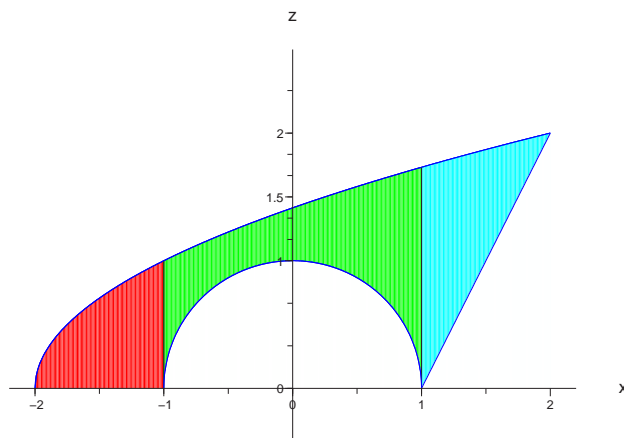
$$D_1 = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x \leq -1, 0 < z < \sqrt{x+2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, \sqrt{1-x^2} < z < \sqrt{x+2} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x < 2, 2x - 2 < z < \sqrt{x+2} \right\}.$$

Quindi

$$m(E) = 6 \int_D z dx dz = 6 \left( \int_{D_1} z dx dz + \int_{D_2} z dx dz + \int_{D_3} z dx dz \right) =$$



**Fig. 31:** L'insieme  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , con  $D_1$  in rosso,  $D_2$  in verde e  $D_3$  in azzurro.

essendo  $D_1, D_2, D_3$   $z$ -semplici, si ottiene

$$\begin{aligned}
 &= 6 \left[ \int_{-2}^{-1} \left( \int_0^{\sqrt{x+2}} z \, dz \right) dx + \int_{-1}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{x+2}} z \, dz \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{2x-2}^{\sqrt{x+2}} z \, dz \right) dx \right] = \\
 &= 6 \left( \int_{-2}^{-1} \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{x+2}} dx + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{x+2}} dx + \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{2x-2}^{\sqrt{x+2}} dx \right) = \\
 &= 3 \left[ \int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx + \int_1^2 (-4x^2 + 9x - 2) dx \right] = \\
 &= 3 \left( \left[ \frac{1}{2} (x+2)^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-1}^1 + \left[ -\frac{4}{3} x^3 + \frac{9}{2} x^2 - 2x \right]_1^2 \right) = 16.
 \end{aligned}$$

e) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, x^2 + y^2 - 2x < 0 \right\}.$$

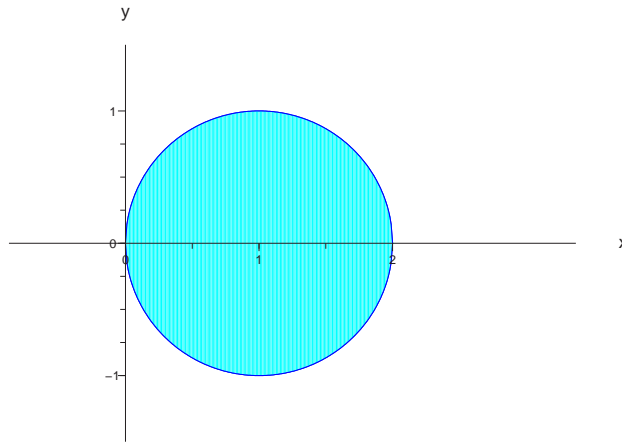
L'insieme  $E$  è la parte dello spazio interna al cilindro di equazione  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  e alla sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Osserviamo che l'insieme  $E$  è simmetrico rispetto al piano  $xy$ . Infatti, se  $(x, y, z) \in E$ , allora anche  $(x, y, -z) \in E$ . Quindi  $m(E) = 2m(E_1)$ , dove

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 - 2x < 0 \right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) = 2m(E_1) &= 2 \int_{E_1} dx dy dz = 2 \int_D \left( \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dx dy = \\ &= 2 \int_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy, \end{aligned}$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x < 0\}$ .



**Fig. 32:** L'insieme  $D$  (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 0 < \rho < 2 \cos \vartheta \\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

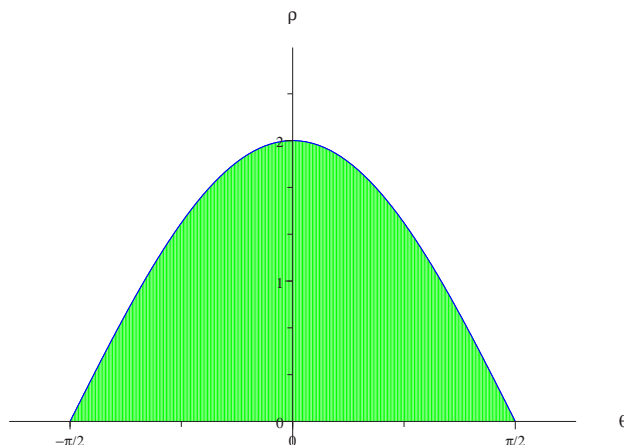
$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \rho < 2 \cos \vartheta \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = 2 \int_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_{D'} \rho \sqrt{4-\rho^2} d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'$   $\rho$ -semplice si ottiene

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} \rho \sqrt{4-\rho^2} d\rho \right) d\vartheta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2 \cos \vartheta} d\vartheta =$$



**Fig. 33:** L'insieme  $D'$  (in verde).

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (4 - 4 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}} - 8 \right] d\vartheta = -\frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|\sin^3 \vartheta| - 1) d\vartheta = \\
 &= -\frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \vartheta - 1) d\vartheta = \frac{16}{3} \pi - \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta = \\
 &= \frac{16}{3} \pi - \frac{32}{3} \left[ -\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} \pi - \frac{64}{9}.
 \end{aligned}$$

f) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{3x^2 + 3y^2}, x^2 + y^2 + z^2 < 2 \right\}.$$

L'insieme  $E$  è la parte dello spazio interna alla sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  e compresa fra i semiconi di equazione  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Osserviamo che  $E = E_1 \setminus E_2$ , dove

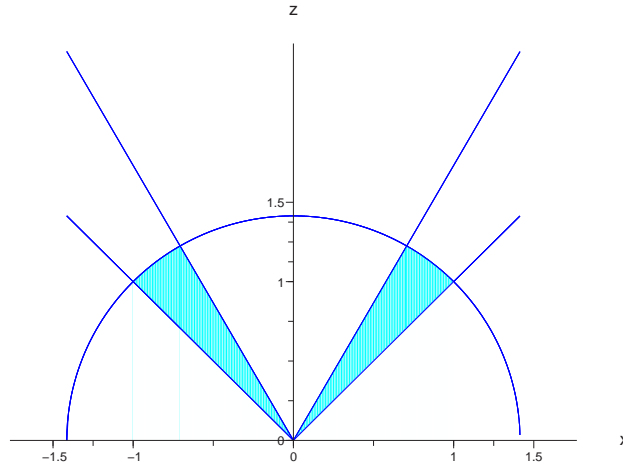
$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z < \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Ne segue che  $m(E) = m(E_1) - m(E_2)$ . Calcoliamo separatamente i volumi di  $E_1$  ed  $E_2$ . Consideriamo inizialmente  $E_1$ .

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E_1) = \int_{D_1} dx dy dz = \int_{D_1} \left( \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy =$$



**Fig. 34:** Sezione dell'insieme  $E$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

$$= \int_{D_1} \left( \sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy,$$

dove  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_1 \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_1 = \Phi(D'_1)$ , dove

$$D'_1 = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}.$$

Ne segue che

$$m(E_1) = \int_{D_1} \left( \sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \int_{D'_1} \rho \left( \sqrt{2 - \rho^2} - \rho \right) d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'_1$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 \left( \rho \sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho \right] = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Consideriamo ora  $E_2$ . Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$\begin{aligned} m(E_2) &= \int_{D_2} dx dy dz = \int_{D_2} \left( \int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dx dy = \\ &= \int_{D_2} \left( \sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy, \end{aligned}$$

dove  $D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \right\}$ . Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_2 \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D_2 = \Phi(D'_2)$ , dove

$$D'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} m(E_2) &= \int_{D_2} \left( \sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy = \\ &= \int_{D'_2} \rho \left( \sqrt{2-\rho^2} - \sqrt{3}\rho \right) d\rho d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo  $D'_2$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \rho\sqrt{2-\rho^2} - \sqrt{3}\rho^2 \right) d\rho \right] = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \rho^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{2} (2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

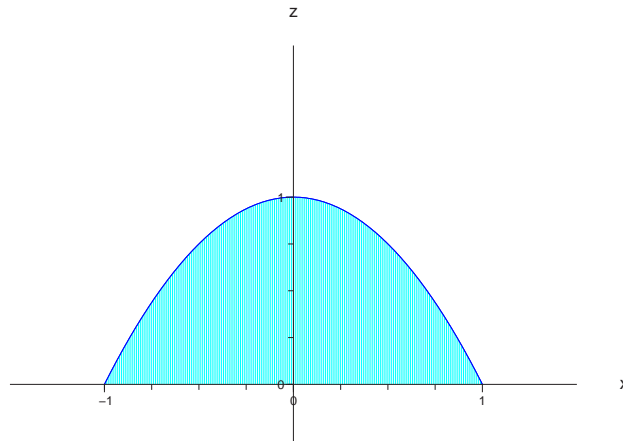
In conclusione si ha che  $m(E) = m(E_1) - m(E_2) = \frac{2}{3} \pi (\sqrt{6} - 2)$ .

g) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

L'insieme  $E$  è la parte dello spazio compresa fra il piano  $z = 0$  e il paraboloido di equazione  $z = 1 - x^2 - y^2$ .





**Fig. 35:** Sezione dell'insieme  $E$  con il piano  $xz$  (in azzurro).

Integrando per fili paralleli all'asse  $z$  si ottiene

$$m(E) = \int_E dx dy dz = \int_D \left( \int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx dy = \int_D (1-x^2-y^2) dx dy,$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Passiamo in coordinate polari nel piano  $xy$ . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = \int_D (1-x^2-y^2) dx dy = \int_{D'} \rho (1-\rho^2) d\rho d\vartheta =$$

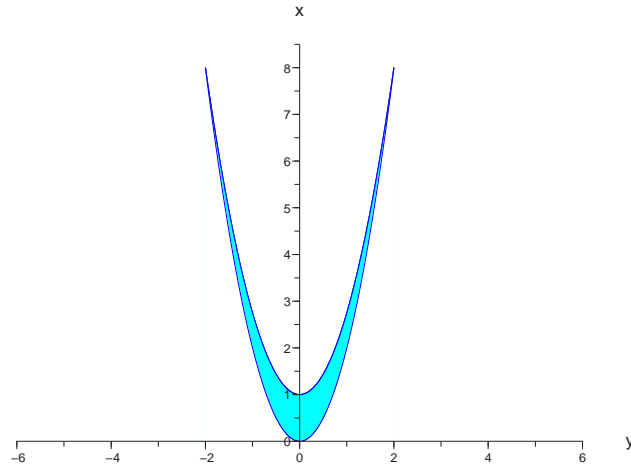
essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right] = 2\pi \left[ \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

h) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y^2 + z^2 < x < 1 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2 \right\}.$$

L'insieme  $E$  è la parte dello spazio compresa fra i paraboloidi di equazione  $x = 2y^2 + z^2$  e  $x = 1 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2$ .



**Fig. 36:** Sezione dell'insieme  $E$  con il piano  $yx$  (in azzurro).

Integrando per fili paralleli all'asse  $x$  si ottiene

$$m(E) = \int_E dx dy dz = \int_D \left( \int_{2y^2+z^2}^{1+\frac{7}{4}y^2+\frac{8}{9}z^2} dx \right) dy dz = \int_D \left( 1 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 \right) dy dz,$$

dove  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1 \right\}$ . Essendo  $D$  l'insieme dei punti interni all'ellisse di equazione  $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ , passiamo in coordinate ellittiche nel piano  $yz$ .

Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} y = 2\rho \cos \vartheta \\ z = 3\rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = 6\rho.$$

Allora

$$(y, z) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che  $D = \Phi(D')$ , dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = \int_D \left( 1 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 \right) dy dz = 6 \int_{D'} \rho (1 - \rho^2) d\rho d\vartheta =$$

essendo  $D'$  un rettangolo con lati paralleli agli assi  $\rho$  e  $\vartheta$  e la funzione integranda prodotto di una funzione di  $\rho$  e di una di  $\vartheta$ , si ottiene

$$= 6 \left( \int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[ \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right] = 12\pi \left[ \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = 3\pi.$$