

Integrali doppi: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali doppi sugli insiemi specificati:

$$a) \int_{\Omega} (x + y) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}, y < x < \sqrt{1 - y^2} \right\} \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$b) \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \right\} \quad \left[\frac{8}{3} \right]$$

$$c) \int_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x} \right\} \quad \left[\frac{1}{12} \right]$$

$$d) \int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0 \right\} \quad \left[\frac{3}{4} \right]$$

$$e) \int_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 < 2x, y > 0 \right\} \quad \left[\frac{5}{48} \right]$$

$$f) \int_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1, x > 0, y > 0 \right\} \quad \left[\frac{1}{16} \right]$$

$$g) \int_{\Omega} x(1-y) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}, y < x < \sqrt{1-y^2} \right\}$$

$$[\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}]$$

$$h) \int_{\Omega} \log(xy) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < -\frac{1}{2}, 4x < y < \frac{1}{x} \right\}$$

$$[5 \log 2 - 3]$$

$$*i) \int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x < y^2 < x, 1 < xy < 2 \right\}$$

$$[\frac{1}{6} \log^2 4]$$

$$l) \int_{\Omega} \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$[\log 25 - \log 24]$$

$$m) \int_{\Omega} \frac{x}{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, 1 < x < 2 \right\}$$

$$[2 \arctan 4 - 3 \arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \log 17 + \frac{3}{4} \log 5 - \frac{1}{2} \log 2]$$

$$n) \int_{\Omega} \frac{\sin y^2}{y} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^2, \sqrt{\pi} < y < \sqrt{2\pi} \right\}$$

$$[-1]$$

$$o) \int_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1 \right\}$$

$$[0]$$

$$p) \int_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x < 0 \right\}$$

$$[\frac{256}{9}]$$

$$q) \int_{\Omega} (x+y^2) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0 \right\}$$

$$[\frac{7}{3} + \frac{15}{16}\pi]$$

$$r) \int_{\Omega} x\sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 < 2y, x < 0 \right\}$$

$$[-\frac{3}{20}]$$

$$s) \int_{\Omega} (x + y) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 < 4, x > 0, y > 0 \right\}$$

$$\left[\frac{4}{9} (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right]$$

Svolgimento

a) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} (x + y) dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}, y < x < \sqrt{1 - y^2} \right\}.$$

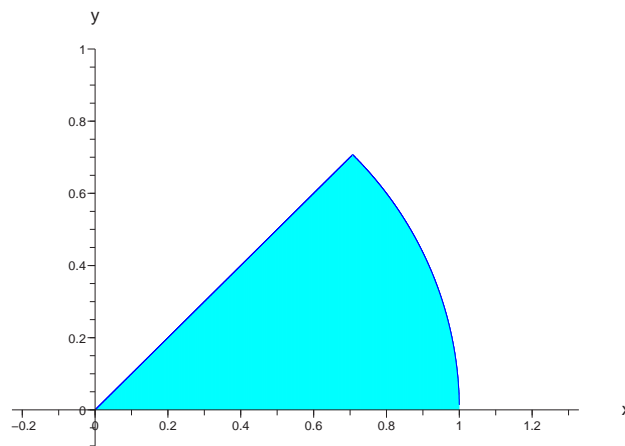


Fig. 1: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x -semplice. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) dx \right] dy = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2} (1 - y^2) + y\sqrt{1 - y^2} - \frac{3}{2} y^2 \right] dy = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y^2 + y\sqrt{1 - y^2} \right) dy = \left[\frac{1}{2} y - \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{3} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \right\}.$$

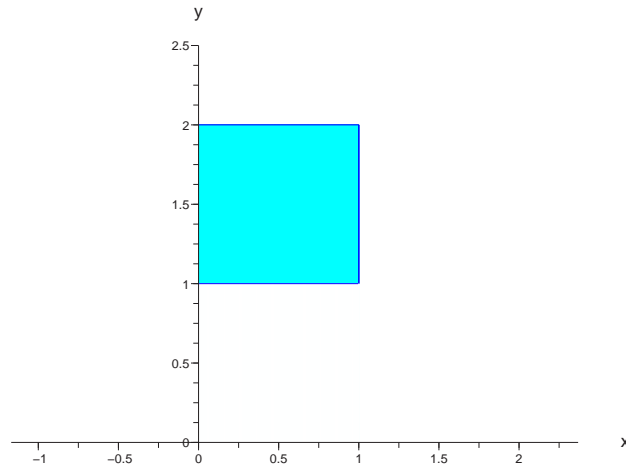


Fig. 2: L'insieme Ω è il quadrato.

L'insieme Ω è sia x -semplice che y -semplice. Si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_1^2 (x^2 + y^2) \, dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{7}{3} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{7}{3} x \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

c) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} xy \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x} \right\}.$$

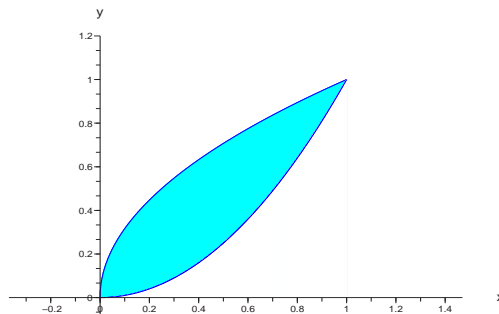


Fig. 3: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è y -semplice. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

d) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$, dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0\}.$$

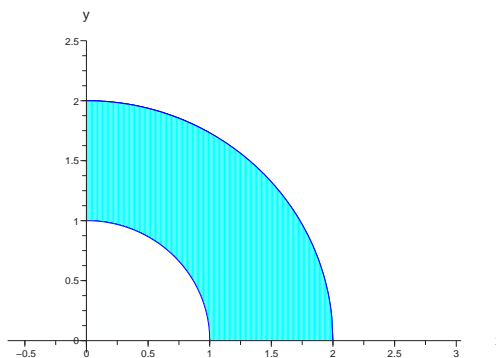


Fig. 4: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è sia x -semplice che y -semplice. Osserviamo che Ω presenta una simmetria radiale. Possiamo quindi passare in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 1 < \rho < 2 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \rho < 2, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\Omega'} \rho \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \left(\int_1^2 \rho \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_1^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}.$$

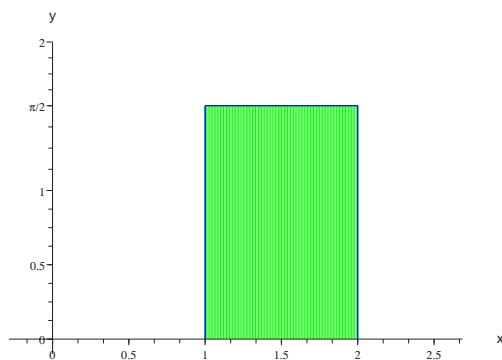


Fig. 5: L'insieme Ω' (in verde).

e) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} xy \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 < 2x, y > 0 \right\}.$$

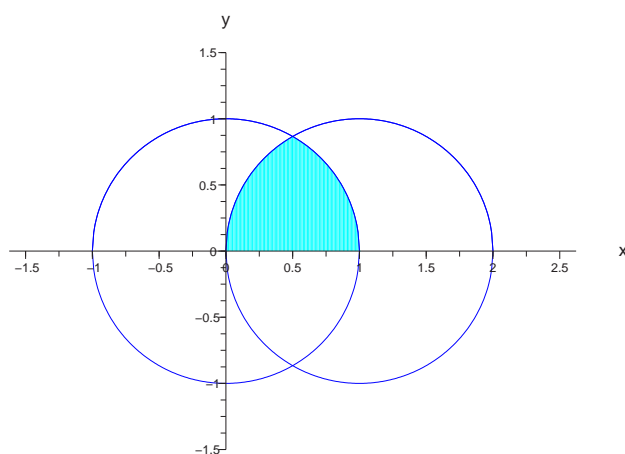


Fig. 6: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \rho < 2 \cos \vartheta \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \Omega'_1 \cup \Omega'_2$, con

$$\Omega'_1 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \right\},$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 2 \cos \vartheta, \frac{\pi}{3} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

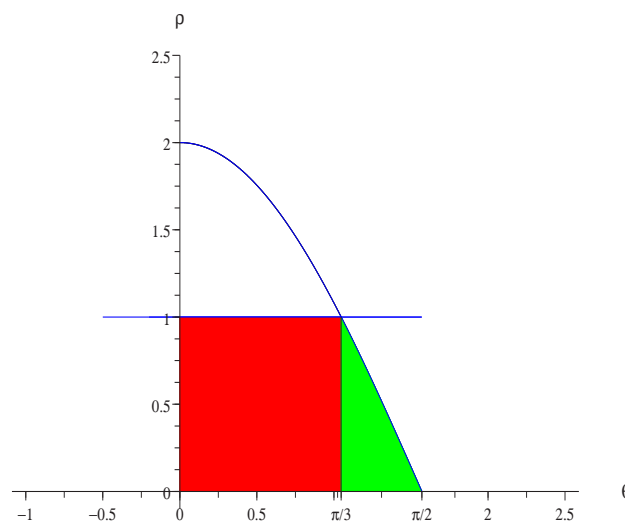


Fig. 7: L'insieme $\Omega' = \Omega'_1 \cup \Omega'_2$, con Ω'_1 (in rosso) e Ω'_2 (in verde).

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy \, dx \, dy &= \int_{\Omega'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_{\Omega'_1} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta + \int_{\Omega'_2} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo sia Ω'_1 che Ω'_2 ρ -semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ , si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \left[\int_0^{2 \cos \vartheta} \rho^3 \, d\rho \right] \, d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{2 \cos \vartheta} d\vartheta = \\
&= \frac{3}{32} + 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{3}{32} + 4 \left[-\frac{1}{6} \cos^6 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{48}.
\end{aligned}$$

f) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} xy \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1, x > 0, y > 0 \right\}.$$

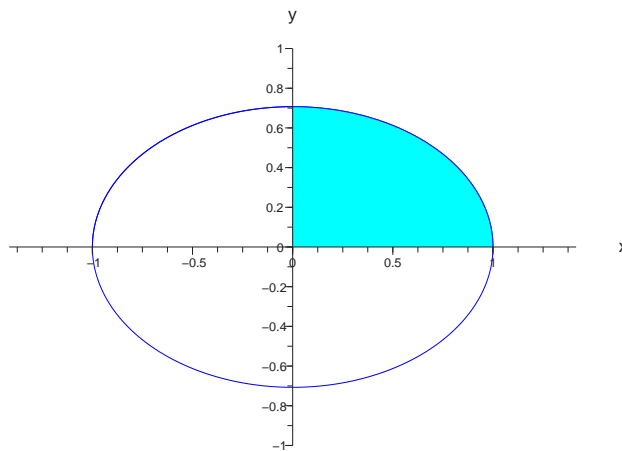


Fig. 8: L'insieme Ω (in azzurro).

Essendo Ω la parte del I quadrante inclusa nell'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\Omega} xy \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta =$$

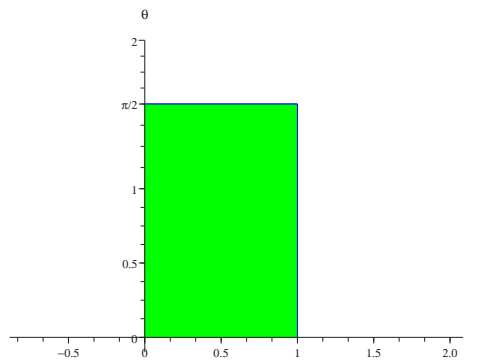


Fig. 9: L'insieme Ω' (in verde).

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}.$$

g) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} x(1-y) dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}, y < x < \sqrt{1-y^2} \right\}.$$

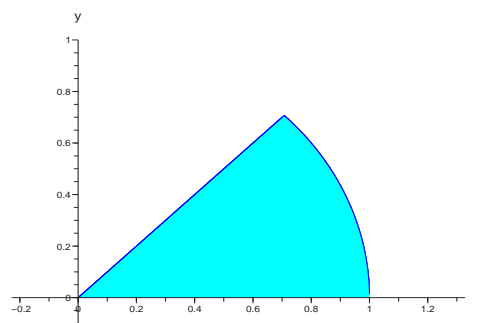


Fig. 10: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x -semplice. Quindi si ha che

$$\int_{\Omega} x(1-y) dx dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y) dx \right] dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 (1-y) \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-y) (1-2y^2) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-y-2y^2+2y^3) dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^4 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

h) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \log(xy) dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < -\frac{1}{2}, 4x < y < \frac{1}{x} \right\}.$$

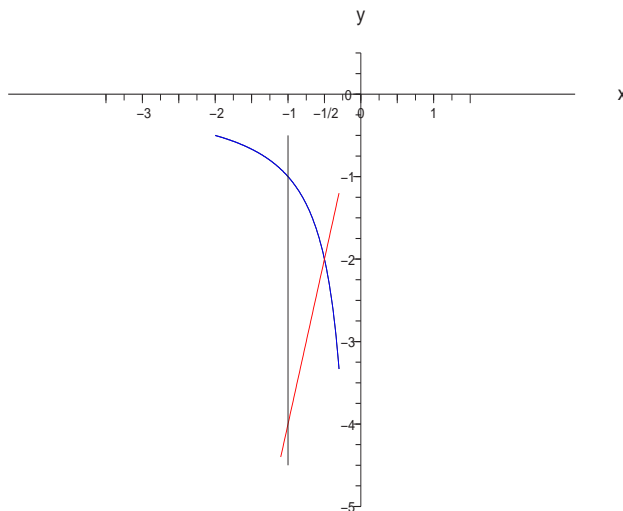


Fig. 11: L'insieme Ω è la parte di piano delimitata dall'iperbole $xy = 1$ (in blu) e dalle rette $y = 4x$ (in rosso) e $x = -1$ (in nero).

L'insieme Ω è y -semplice. Quindi si ha che

$$\int_{\Omega} \log(xy) dx dy = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{4x}^{\frac{1}{x}} \log(xy) dy \right] dx =$$

integrando per parti

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\left[y \log(xy) \right]_{4x}^{\frac{1}{x}} - \int_{4x}^{\frac{1}{x}} dy \right) dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(-4x \log 4x^2 - \frac{1}{x} + 4x \right) dx =$$

integrando per parti

$$= -4 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \log 4x^2 \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x dx \right) + \left[-\log|x| + 2x^2 \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -4 \left(-\log 2 + \frac{3}{8} \right) + \log 2 - \frac{3}{2} = 5 \log 2 - 3.$$

*i) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x < y^2 < x, 1 < xy < 2 \right\}.$$

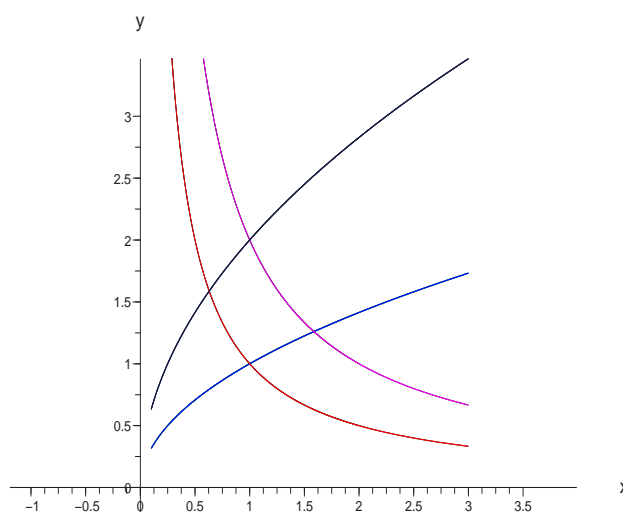


Fig. 12: L'insieme Ω è la parte di piano delimitata dalle parabole $x = y^2$ (in blu), $x = 4y^2$ (in nero) e dalle iperboli $xy = 1$ (in rosso) e $xy = 2$ (in fucsia).

L'insieme Ω si può scomporre nell'unione di un numero finito di insiemi x -semplici o y -semplici aventi a due a due in comune al più dei segmenti del piano. Tuttavia procedendo in questo modo risulta assai arduo il calcolo dell'integrale. Pertanto conviene procedere come segue.

Osserviamo che Ω è contenuto nel I quadrante. Pertanto per ogni $(x, y) \in \Omega$ si ha che $x, y > 0$. Quindi

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} \frac{1}{4} < \frac{y^2}{x} < 1, \\ 1 < xy < 2. \end{cases}$$

Poichè anche la funzione integranda $f(x, y) = \log \frac{x}{y^2}$ contiene il termine $\frac{y^2}{x}$, conviene operare il seguente cambiamento di variabili:

$$\Psi : \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2}, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega.$$

Evidentemente

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 1 < u < 2, \\ 1 < v < 4. \end{cases}$$

In realtà a noi interessa il cambiamento di variabili inverso. Posto quindi $\Phi = \Psi^{-1}$, ricavando x e y in funzione di u e v , si ottiene

$$\Phi : \begin{cases} x = u \sqrt[3]{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{u}{v}}, \end{cases} \quad 1 < u < 2, \quad 1 < v < 4.$$

Resta da calcolare il determinante della matrice Jacobiana di Φ . Dal Teorema dell'inversione locale si ha che

$$\det J_{\Phi}(u, v) = \det J_{\Psi^{-1}}(u, v) = \left(\det J_{\Psi}(\Phi(u, v)) \right)^{-1}.$$

Si ha che

$$J_{\Psi}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix} \implies \det J_{\Psi}(x, y) = -\frac{3x}{y^2}.$$

Quindi

$$|\det J_{\Phi}(u, v)| = \frac{1}{3v}.$$

Si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 1 < v < 4\}$.

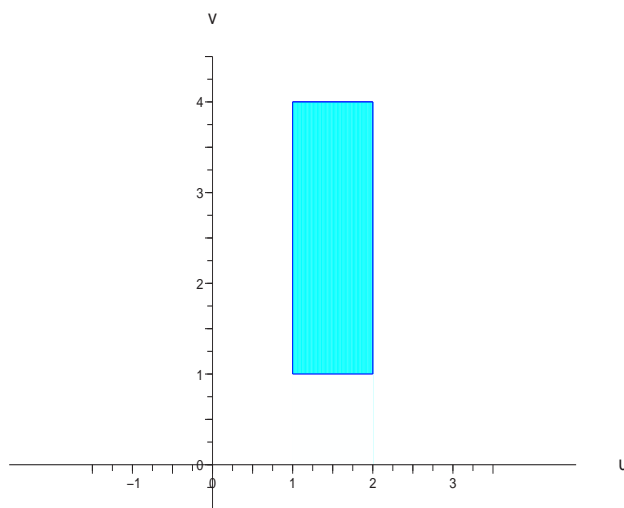


Fig. 13: L'insieme Ω' (in azzurro).

L'integrale diventa

$$\int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} dx dy = \int_{\Omega'} \frac{\log v}{3v} du dv =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi u e v e la funzione integranda prodotto di una funzione di u per una funzione di v , si ottiene

$$= \frac{1}{3} \left(\int_1^2 du \right) \left(\int_1^4 \frac{\log v}{v} dv \right) = \frac{1}{3} [u]_1^2 \left[\frac{1}{2} \log^2 v \right]_1^4 = \frac{1}{6} \log^2 4.$$

l) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4 \right\}.$$

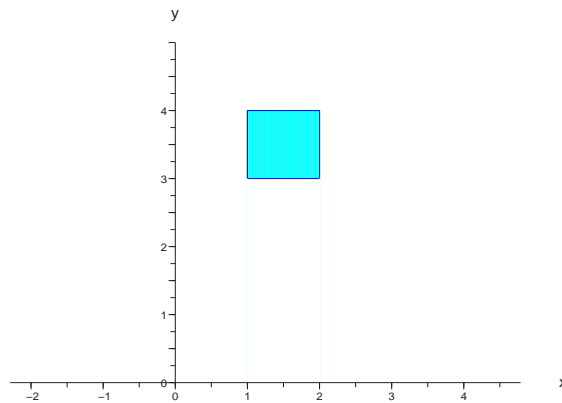


Fig. 14: L'insieme Ω è il quadrato.

L'insieme Ω è sia x -semplice che y -semplice. Si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{(x+y)^2} dx dy &= \int_1^2 \left[\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_3^4 dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \left[\log |x+3| - \log |x+4| \right]_1^2 = \log 25 - \log 24. \end{aligned}$$

m) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, 1 < x < 2 \right\}.$$

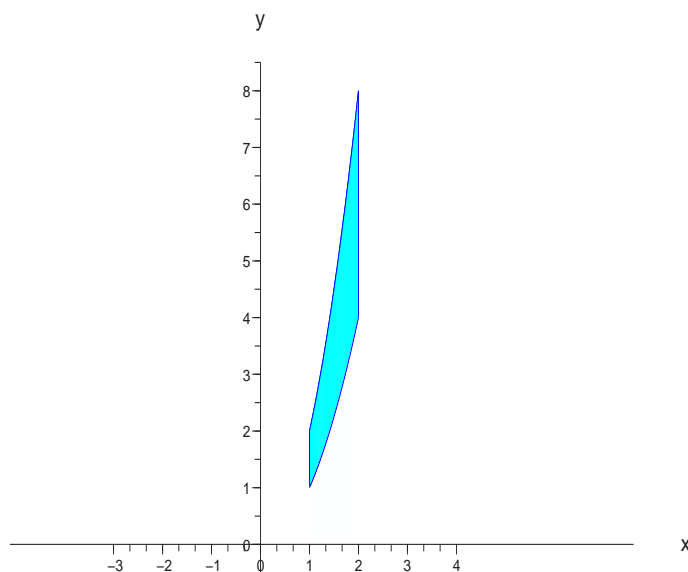


Fig. 15: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è y -semplice. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{2x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{2x^2} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy \right] dx = \\ &= \int_1^2 \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{x^2}^{2x^2} dx = \int_1^2 (\arctan 2x - \arctan x) dx = \end{aligned}$$

integrando per parti

$$\begin{aligned} &= \left[x(\arctan 2x - \arctan x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{2x}{1 + 4x^2} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx = \\ &= 2 \arctan 4 - 3 \arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{4} \log(1 + 4x^2) - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) \right]_1^2 = \\ &= 2 \arctan 4 - 3 \arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \log 17 + \frac{3}{4} \log 5 - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

n) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \frac{\sin y^2}{y} dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^2, \sqrt{\pi} < y < \sqrt{2\pi} \right\}.$$

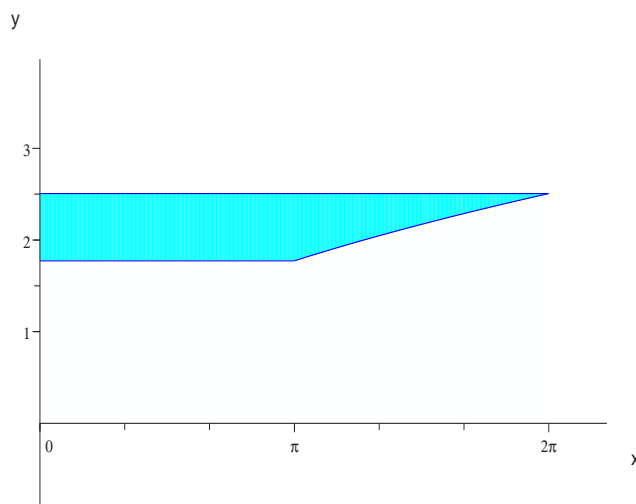


Fig. 16: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x -semplice. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\sin y^2}{y} dx dy &= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y} dx \right] dy = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin y^2}{y} x \right]_0^{y^2} dy = \\ &= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} y \sin y^2 dy = \left[-\frac{1}{2} \cos y^2 \right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -1. \end{aligned}$$

o) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} xy dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1 \right\}.$$

Osserviamo che sia Ω che $f(x, y) = xy$ presentano una simmetria rispetto ad entrambi gli assi. In particolare si ha che

$$(x, y) \in \Omega, y > 0 \implies (x, -y) \in \Omega, \quad f(x, -y) = -f(x, y).$$

Quindi

$$\int_{\Omega \cap \{(x, y) : y \geq 0\}} xy dx dy = - \int_{\Omega \cap \{(x, y) : y < 0\}} xy dx dy.$$

Essendo $\Omega = \left(\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \right) \cup \left(\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \right)$, si ha che

$$\int_{\Omega} xy dx dy = 0.$$

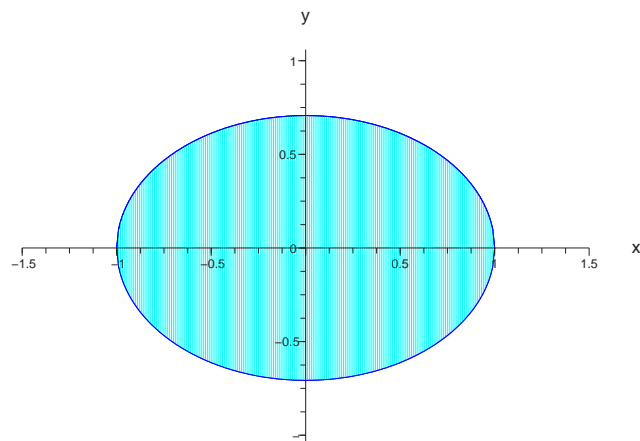


Fig. 17: L'insieme Ω (in azzurro).

p) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x < 0\}.$$

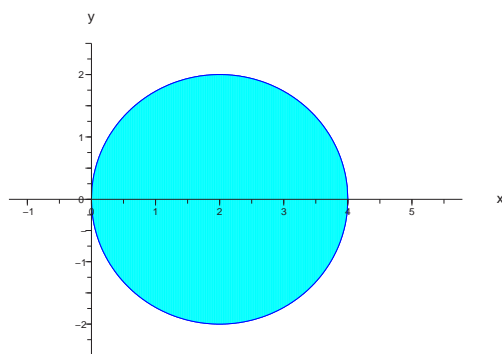


Fig. 18: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 4 \cos \vartheta \\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 4 \cos \vartheta, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

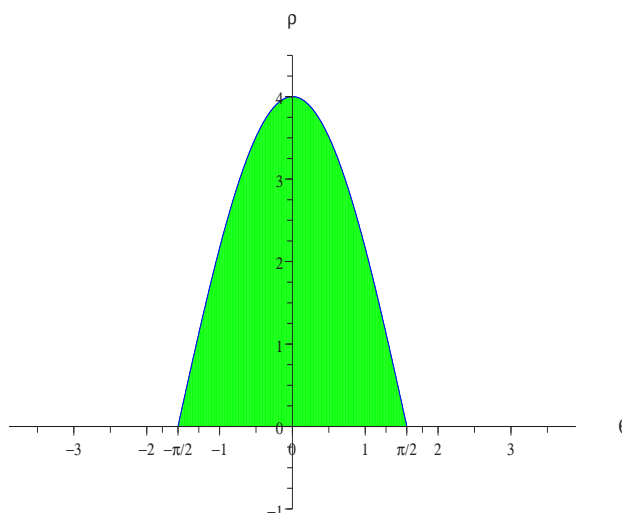


Fig. 19: L'insieme Ω' (in verde).

Ne segue che

$$\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_{\Omega'} \rho^2 \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo Ω' ρ -semplice e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \cos \vartheta} \rho^2 \, d\rho \right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^{4 \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \vartheta \, d\vartheta =$$

integrando per parti

$$= \frac{64}{3} \left(\left[\sin \vartheta \cos^2 \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{128}{3} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{9}.$$

q) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} (x + y^2) \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0 \right\}.$$

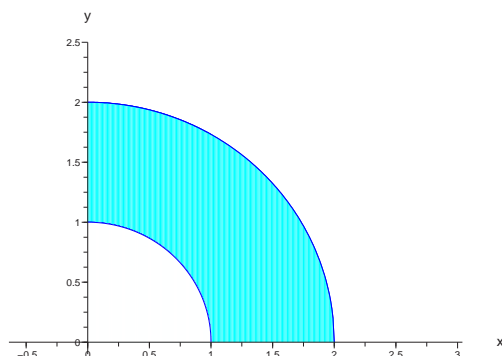


Fig. 20: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 1 < \rho < 2 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \rho < 2, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\Omega} (x + y^2) \, dx \, dy = \int_{\Omega'} (\rho^2 \cos \vartheta + \rho^3 \sin^2 \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda somma di prodotti di funzioni di ρ e di funzioni di ϑ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_1^2 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta \right) + \left(\int_1^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_1^2 \left[\sin \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_1^2 \left[\frac{1}{2} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3} + \frac{15}{16} \pi. \end{aligned}$$

r) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 < 2y, \quad x < 0 \right\}.$$

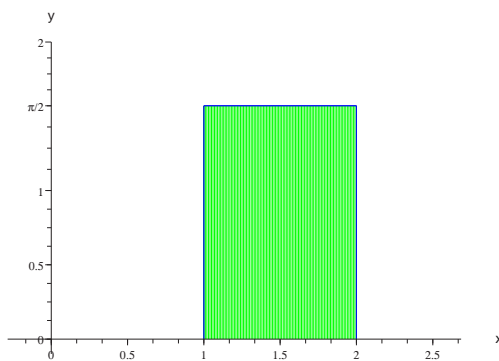


Fig. 21: L'insieme Ω' (in verde).

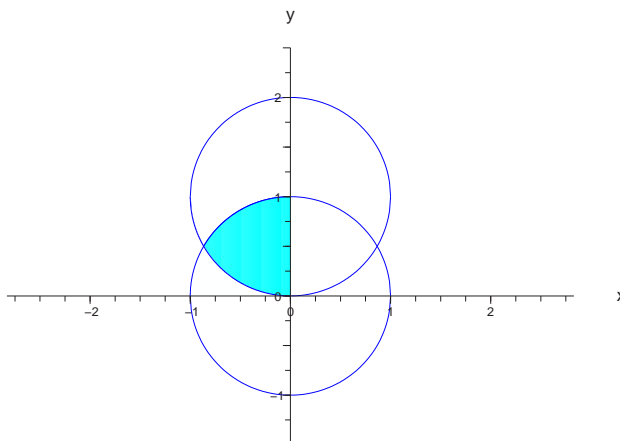


Fig. 22: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \rho < 2 \sin \vartheta \\ \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \Omega'_1 \cup \Omega'_2$, con

$$\Omega'_1 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, \frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{5}{6}\pi \right\},$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 2 \sin \vartheta, \frac{5}{6}\pi \leq \vartheta < \pi \right\}.$$

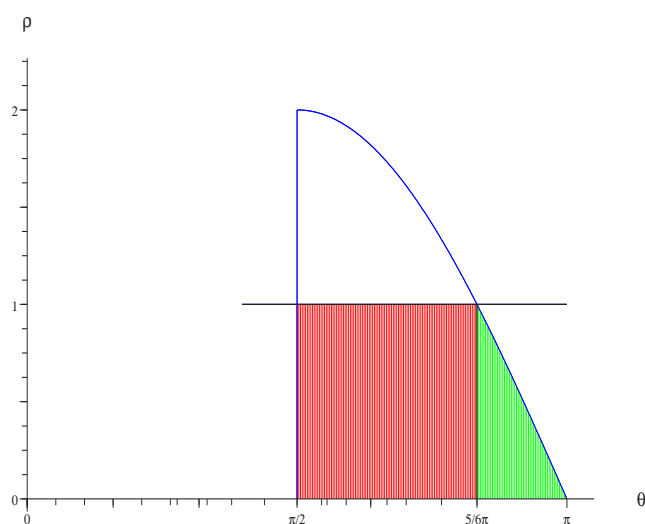


Fig. 23: L'insieme $\Omega' = \Omega'_1 \cup \Omega'_2$, con Ω'_1 in rosso e Ω'_2 in verde.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\Omega'} \rho^3 \cos \vartheta d\rho d\vartheta = \\ &= \int_{\Omega'_1} \rho^3 \cos \vartheta d\rho d\vartheta + \int_{\Omega'_2} \rho^3 \cos \vartheta d\rho d\vartheta = \end{aligned}$$

essendo sia Ω'_1 che Ω'_2 ρ -semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ si ottiene, si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} \cos \vartheta d\vartheta \right) + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos \vartheta \left[\int_0^{2 \sin \vartheta} \rho^3 d\rho \right] d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \left[\sin \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos \vartheta \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{2 \sin \vartheta} d\vartheta = \\
&= -\frac{1}{8} + 4 \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos \vartheta \sin^4 \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{8} + 4 \left[\frac{1}{5} \sin^5 \vartheta \right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} = \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{1}{40} = -\frac{3}{20}.
\end{aligned}$$

s) Consideriamo l'integrale $\int_{\Omega} (x+y) dx dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 < 4, x > 0, y > 0 \right\}.$$

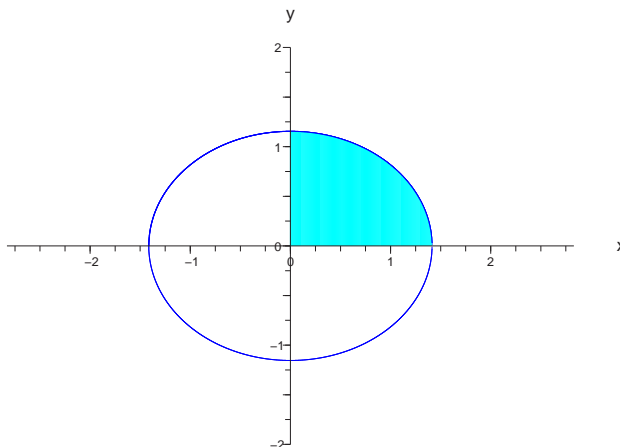


Fig. 24: L'insieme Ω (in azzurro).

Essendo Ω la parte del I quadrante inclusa nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \sqrt{2}\rho \cos \vartheta \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta)| = \frac{2}{3}\sqrt{6}\rho.$$

Allora

$$(x, y) \in \Omega \iff \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

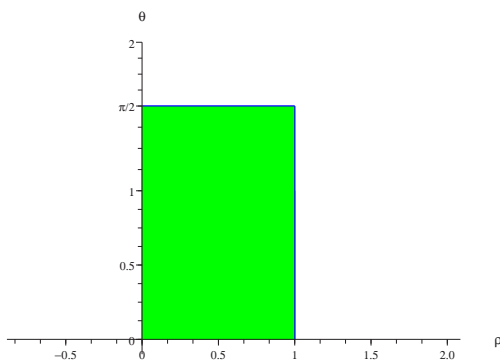


Fig. 25: L'insieme Ω' (in verde).

Ne segue che

$$\int_{\Omega} (x + y) dx dy = \int_{\Omega'} \frac{2}{3} \sqrt{6} \rho \left(\sqrt{2} \rho \cos \vartheta + \frac{2}{3} \sqrt{3} \rho \sin \vartheta \right) d\rho d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda somma di prodotti di funzioni di ρ e di funzioni di ϑ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} \sqrt{3} \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta d\vartheta \right) + \frac{4}{3} \sqrt{2} \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{3} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 \left[\sin \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3} \sqrt{2} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 \left[-\cos \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{9} (\sqrt{3} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$