SERIE NUMERICHE

Esercizi risolti

1. Applicando la definizione di convergenza di una serie stabilire il carattere delle seguenti serie, e, in caso di convergenza, trovarne la somma:

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

2. Verificare (utilizzando la condizione necessaria per la convergenza) che le seguenti serie non convergono:

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(1+\frac{1}{n})}$ $\qquad$ $d)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$

3. Utilizzando la serie geometrica, discutere il comportamento delle serie seguenti e calcolarne la somma. Determinare inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la somma delle serie b) e c) risulta $\dfrac{1}{3}$.

$a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n\ , \quad \alpha \in]0,\infty[$ $\qquad$ $c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$

4. Utilizzando i criteri del rapporto, della radice, del confronto e del confronto asintotico, dire se le seguenti serie (a termini positivi) convergono:

$a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $\qquad$ $d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

$e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ $\qquad$ $f)\ \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\qquad$ $h)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$

$i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ $\qquad$ $j)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

$k)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$ $\qquad$ $l)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$m)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$ $\qquad$ $n)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

5. Utilizzando il criterio di Leibniz, discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\log n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

6. Utilizzando il criterio di MacLaurin discutere il comportamento delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}$, $a \in\ ]\,0,+\infty\,[$

7. Utilizzando il teorema di MacLaurin provare che la seguente serie converge e trovare un maggiorante e un minorante per la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

8. Utilizzando il fatto che $\displaystyle\frac{1}{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, determinare $\displaystyle\frac{1}{e}$ con un errore minore di $\displaystyle\frac{1}{100}$.

9. Si considerino le serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ne^{-n^2}$

Dopo aver dimostrato che convergono, calcolare un'approssimazione delle rispettive somme a meno di 10^{-4}.

SOLUZIONI degli esercizi sulle SERIE NUMERICHE

1. (a) Applichiamo il metodo di risoluzione delle serie telescopiche.

Scomponiamo $a_n = \dfrac{2}{n^2+2n}$ come somma di due frazioni (usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici):

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

Dunque:

$$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

la serie converge e la somma è $\dfrac{3}{2}$.

(b) $$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Dunque

$$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

la serie converge e la sua somma è 1.

2. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

Tale limite non esiste, dunque non è zero. Pertanto la serie non converge.

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\log n} = 1$ (ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$).

Dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ e la serie non converge (diverge a $+\infty$, in quanto è a termini positivi).

(c) Poiché $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{\log 1} = +\infty$

la serie non converge (diverge a $+\infty$, perché $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$).

(d) Poiché non esiste $\lim_{n\to\infty} \sin n$, la serie non converge.

3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

Si tratta della somma di due serie geometriche entrambe convergenti (la ragione è minore di 1).

Dunque la serie iniziale converge alla somma delle due.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{2}{5}} = \frac{5}{3}\ , \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = S_1 + S_2 = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$$

(b) Si tratta di una serie geometrica di ragione $\log\alpha$. Dunque converge se:

$|\log\alpha| < 1 \iff -1 < \log\alpha < 1 \iff e^{-1} < \alpha < e.$

Per tali valori di α la somma della serie è $S = \sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n = \dfrac{1}{1-\log\alpha}$.

Osserviamo che $-1 < \log\alpha < 1 \iff 0 < 1-\log\alpha < 2 \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1-\log\alpha} = S$; dunque non esistono valori di α per cui $S = \dfrac{1}{3}$.

(c) E' una serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{1+\alpha}$, che converge se e solo se :

$\left|\dfrac{1}{1+\alpha}\right| < 1 \iff -1 < \dfrac{1}{1+\alpha} < 1 \iff \alpha < -2 \ \vee \ \alpha > 0$.

Per tali valori di α la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\alpha)^n}$ è $S_1 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\alpha}} = \dfrac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$.

Pertanto la nostra somma vale $S = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\alpha)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(1+\alpha)^\alpha} - 1 = \dfrac{1}{\alpha}$.

$S = \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{\alpha} \iff \alpha = 3$ (valore di α accettabile).

4. (a) Usiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \, \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \; < \; 1 \; .$$

Dunque la serie converge.

(b) Usiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} \, \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \, \frac{n! \; n!}{(n+1)! \; (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \, \frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{(n+1)^2} = 4 \; > \; 1 \; .$$

Dunque la serie diverge.

(c) Usiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \; < \; 1 \; .$$

Pertanto la serie converge.

(d) Usiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \; (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{2^n \; n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+1)} \, \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 2 \, \frac{1}{e} \; < \; 1 \; .$$

Dunque la serie converge.

(e) Usiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \; (n+1)!}{n! \; n!} \, \frac{2^{n^2}}{2^{n^2+1+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 \; < \; 1 \; .$$

Pertanto la serie converge.

(f) Usiamo il criterio del confronto.

Poiché $\forall n \geq 3$, $\log n > 1$, si ha che $\dfrac{\log n}{n} > \dfrac{1}{n}$.

Dunque la nostra serie è una maggiorante di una serie divergente, e pertanto diverge.

(g) Usiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \; < \; 1$$

Dunque la serie converge.

(h) Usiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[(\log n)^{-\frac{n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 \; < \; 1$$

Dunque la serie converge.

(i) Usiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0 < 1 \ .$$

(Infatti $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$).

Pertanto la serie converge.

(j) Usiamo il criterio del confronto.

Poiché $|\sin n| \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, si ha:

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ .$$

Ricordando che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, la nostra serie risulta essere una minorante di una serie convergente, e dunque converge.

(k) Usiamo il criterio del confronto asintotico.

Osserviamo che per $n \to \infty$, $\dfrac{3n^2+1}{n^4+n+1} \sim \dfrac{3}{n^2}$.

Poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ converge, anche la nostra serie converge.

(l) Usiamo il criterio del confronto.

Poiché $n > \sqrt{n}$, si ha $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n}$.

Dunque la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è una maggiorante della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge.

Pertanto anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

(m) Usiamo il criterio del confronto asintotico.

Poiché, per $n \to \infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}(1+n)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot n} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

e poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, anche la nostra serie converge.

(n) Usiamo il criterio del confronto asintotico.

Poiché per $n \to \infty$, $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, e poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

5. (a) Posto $a_n = \sin\dfrac{1}{n}$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

La successione $\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ è decrescente.

Infatti, poiché $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$ $(\forall n \geq 1)$ e $f(t) = \sin t$ è crescente per $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, si ha:

$n < n+1 \implies \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \implies \sin\dfrac{1}{n+1} < \sin\dfrac{1}{n}$.

Pertanto si può applicare il criterio di Leibniz e concludere che essa converge semplicemente.

Non converge invece assolutamente, perché la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$ diverge:

infatti, per $n \to \infty$, $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ e la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$

Poiché $\sqrt{n+1}+2 > \sqrt{n}+2$, si ha $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+2} < \dfrac{1}{\sqrt{n}+2}$; dunque la successione $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}+2}\right)_{n\geq 1}$ è monotona decrescente.

Per il criterio di Leibniz, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+2}$ converge semplicemente.

Invece non converge assolutamente.

Infatti, essendo $\sqrt{n}+2 < n+2$, si ha $\dfrac{1}{\sqrt{n}+2} > \dfrac{1}{n+2}$; dunque la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+2}$ diverge, in quanto maggiorante di una serie divergente.

(c) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ converge : infatti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n} = \dfrac{2}{3} < 1$.

Pertanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ converge assolutamente e dunque semplicemente.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log n} = 0$

La funzione logaritmo in base e è monotona crescente. Quindi, $\forall n \geq 1$, $\log(n+1) > \log n$, e dunque (per $n \geq 2$), $\dfrac{1}{\log(n+1)} < \dfrac{1}{\log n}$.

Pertanto la successione $\left(\dfrac{1}{\log n}\right)_{n\geq 3}$ è strettamente decrescente.

Per il criterio di Leibniz, la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\log n}$ converge.

Invece non converge assolutamente; infatti, $\forall n \geq 3$, $\log n < n$ e dunque $\dfrac{1}{\log n} > \dfrac{1}{n}$; pertanto la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$ diverge in quanto maggiorante di una serie divergente.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3}$

Poiché, per $n \to +\infty$, $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{n^3+3} \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, la nostra serie converge assolutamente (e dunque anche semplicemente).

(f) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Dunque la nostra serie converge assolutamente e anche semplicemente.

(g) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$ converge: infatti, per $n \to \infty$, $\displaystyle\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$; pertanto $\displaystyle 1 - n\sin\frac{1}{n} \sim 1 - 1 + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{6n^2}$.

Poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^2}$ converge, anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$ converge.

Pertanto la nostra serie converge assolutamente (e dunque anche semplicemente).

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{3} - 1) = \lim_{n\to\infty} (3^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$

La funzione $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ è decrescente: infatti $f'(x) = 3^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \ln 3 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Pertanto anche la successione $\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)_{n\geq 1}$ è decrescente; dunque per il criterio di Leibniz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$ converge semplicemente.

La serie invece non converge assolutamente.

Utilizziamo il criterio del confronto asintotico; per $n \to \infty$:
$\displaystyle 3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\log 3}{n}} - 1 = \frac{\log 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\log 3}{n}$.

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 3}{n}$ diverge, anche la nostra serie diverge assolutamente.

Un altro modo per vedere che la serie non converge assolutamente è l'utilizzo del criterio del confronto semplice; ricordando che $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$, si ha:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \longrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 3^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 3^{\frac{1}{n}} - 1 > \frac{1}{n} .$$

Pertanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)$ diverge, in quanto maggiorante di una serie divergente.

6. (a) Studiamo il comportamento della funzione $\varphi(x) = \dfrac{\log x}{(2x+1)^2}$, (per cui $\varphi(n) = a_n$), sull'intervallo I= $[2, +\infty[$.

Tale funzione è positiva ed è decrescente su I; infatti:

$$\varphi'(x) = \frac{2 + \frac{1}{x} - 4\ln x}{(2x+1)^3} \ ;$$

si può provare che su I, $4\log x > 2 + \dfrac{1}{x}$ e dunque $f'(x) < 0$.

Pertanto si può applicare il teorema di MacLaurin:

la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{(2n+1)^2}$ converge se e solo se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(2x+1)^2}\, dx$.

Si può facilmente verificare che , $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\log x < \sqrt{x}$, e dunque $\dfrac{\log x}{(2x+1)^2} < \dfrac{\sqrt{x}}{(2x+1)^2}$.

L'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x$ converge perché, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sqrt{x}}{(2x+1)^2} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{4x^2} = \dfrac{1}{4x^{3/2}}$.

Pertanto (per il criterio del confronto) converge anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x$

e quindi anche la nostra serie è convergente.

Anche se non è richiesto, calcoliamo l'integrale improprio; l'integrale indefinito (risolto per parti) dà come risultato:

$$\int \frac{\log x}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2x+1}\right| + c$$

Dunque:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{\log x}{(2x+1)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log 5 - \frac{9}{10}\log 2 \ .$$

(b) Studiamo (sull'intervallo I = $[\,3, +\infty\,[$) la funzione:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2x^2+1)\ln x} \ , \quad \text{in quanto } \varphi(n) = \frac{1}{(2n^2+1)\log n} = a_n \ .$$

$\varphi(x)$ è positiva e decrescente.

Infatti $\varphi'(x) = \dfrac{-\left[4x\ln x + \frac{2x^2+1}{x}\right]}{(2x+1)^2\ln^2 x} < 0$, se $x \in$ I .

L'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x^2+1)\ln x}\, \mathrm{d}x$ converge ; infatti :

$$\forall x \in \text{I} \ , \ \ln x \geq 1 \implies \frac{1}{\ln x} \leq 1 \implies \frac{1}{(2x^2+1)\ln x} \leq \frac{1}{2x^2+1} \ .$$

Poiché $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{2x^2+1}\, \mathrm{d}x$ converge, per il teorema del confronto converge anche

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x^2+1)\ln x}\, \mathrm{d}x \ .$$

Dunque, per il teorema di MacLaurin, converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2x^2+1)\log n}$.

(c) Considero (sull'intervallo I=$[\,2, +\infty\,[$) la funzione $\varphi(x) = \dfrac{1}{x\log x}$.

Essa è positiva e decrescente; infatti: $\varphi'(x) = \dfrac{-(\log x + 1)}{x^2 \log^2 x} < 0$ su I.

Calcolo ora l'integrale improprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x\ln x}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \Big[\log|\log x|\Big]_2^b = +\infty$$

Dunque l'integrale diverge e (per il teorema di MacLaurin) anche la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverge.

(d) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ è positiva e decrescente per $x \geq 2$.

L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, \mathrm{d}x$ converge. Infatti:

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\, \mathrm{d}x = \int_2^b \frac{1}{x}(\log x)^{-2}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{\log x}\right]_2^b = +\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log b} .$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log b}\right] = \frac{1}{\log 2}$$

Dunque converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

(e) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\log x}}$ è positiva e decrescente per $x \geq 2$.

L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\, \mathrm{d}x$ diverge. Infatti:

$$\int_2^b \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\, \mathrm{d}x = \int_2^b \frac{1}{x}(\log x)^{-1/2}\, \mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{\log x}\Big]_2^b = 2\sqrt{\log b} - 2\sqrt{\log 2}$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \Big[2\sqrt{\log b} - 2\sqrt{\log 2}\Big] = +\infty$$

Dunque diverge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$.

(f) Se $a > 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ diverge (perché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$).

Se $a = 1$, si ha la serie armonica che diverge.

Per $0 < a < 1$, considero la funzione $\dfrac{a^x}{x}$ su I $= [\,1, +\infty\,[$, dove è positiva e decrescente .

L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{x}\, \mathrm{d}x$ converge perché, se $x > 1$, si ha $\dfrac{a^x}{x} < a^x$ e l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} a^x\, \mathrm{d}x$ converge.

Dunque, se $0 < a < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ converge.

7. Poiché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ è positiva e decrescente (per $x > 1$) possiamo usare il teorema di MacLaurin; studiamo pertanto la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{2(2x+1)}\right]_1^b = \frac{1}{6}$$

Dunque la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge ad un numero finito S e si ha la seguente diseguaglianza:

$$\int_1^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x < S < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6} < S < \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$

8. Per una serie a termini di segno alterno convergente ad S si sa che il resto n-esimo $R_n = S - S_n$ soddisfa la disuguaglianza:

$$|R_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} (-1)^j a_j \right| \le a_{n+1}$$

Vogliamo $|R_n| < \dfrac{1}{100}$; questo è senz'altro verificato se :

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100} \iff (n+1)! > 100 \iff n \ge 4$$

Dunque si commette un errore minore di $\dfrac{1}{100}$ approssimando $\dfrac{1}{e}$ con il valore

$$\frac{1}{e} \sim 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{3}{8}$$

9. (a) Applichiamo il criterio di MacLaurin alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

La funzione $\varphi(x) = xe^{-x^2}$ è positiva e decrescente su I= $[1, +\infty[$. Inoltre:

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x}{e^{x^2}} \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2e}$$

Dunque la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge ad un numero reale S e si ha:

$$0 < R_n = S - S_n \le \int_n^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-n^2}$$

Sicuramente sarà: $R_n < 10^{-4} \iff \dfrac{1}{2}e^{-n^2} < 10^{-4} \iff n \ge 3$.

(b) Per la serie a termini di segni alterni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ne^{-n^2}$ convergente al numero reale S e si ha :

$|R_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$.

Dunque si avrà un'approssimazione di S minore di 10^{-4} se:

$(n+1)e^{-(n+1)^2} < 10^{-4} \iff n \ge 3$