Esercizio 1

Assegnata la funzione:

$$f(x) = x - x^3,$$

mostrare che verifica il teorema di Rolle nei rispettivi intervalli compatti $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Determinare inoltre i punti x_0 tali che $f'(x_0) = 0$.

***

Soluzione
Risulta:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ è continua in } [-1,0] \\ f \text{ è derivabile in } (-1,0) \\ f(-1) = f(0) = 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0$$

In maniera del tutto analoga per l'intervallo $[0, 1]$. Calcoliamo ora i punti x_0. A tale scopo determiniamo la derivata prima:

$$f'(x) = 1 - 2x^2$$

Gli zeri della derivata:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

donde:

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{\sqrt{3}} = x_0 \in [-1,0] \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = x_0' \in [0,1] \end{array}$$

Esercizio 2

Mostrare che per la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2},$$

non è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 4]$.

***

Soluzione
Risulta:

$$\begin{array}{c} f \text{ è continua in } [0,4] \\ f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4} \end{array}$$

Riguardo alla derivabilità in $(0,4)$, osserviamo che la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}},$$

pertanto la funzione non è derivabile in $2 = x_0 \in [0,4]$, quindi non è applicabile il teorema di Rolle.

Esercizio 3

Mostrare che per la funzione

$$f(x) = \tan x,$$

non è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[0,\pi]$.

***

Soluzione
Il punto $\frac{\pi}{2} = x_0 \in [0,\pi]$ è una singolarità per f, per cui viene violata una delle ipotesi del teorema di Rolle, che pertanto diviene inapplicabile.

Esercizio 4

Servendosi del teorema di Lagrange, dimostrare che:

$$\forall x \in (0,+\infty), \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) = \ln x, \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

Per il teorema di Lagrange:

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta), \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Quindi:

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x+\theta} \Longleftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\theta},$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

Esercizio 5

Assegnata la funzione:

$$f(x) = x - x^3,$$

mostrare che essa verifica il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 1]$ e trovare il punto ξ.

***

Soluzione
Le ipotesi del teorema di Lagrange sono verificate, per cui:

$$\exists \xi \in (-2, 1) \mid \frac{f(-2) - f(1)}{-2 - 1} = f'(\xi)$$

Per determinare i punti ξ dobbiamo risolvere l'equazione:

$$f'(\xi) = -2 \tag{1}$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = 1 - 3x^2,$$

donde la (**??**) diventa:

$$1 - 3\xi^2 = -2 \Longrightarrow \xi = \pm 1,$$

di cui solo la soluzione $\xi_1 = -1$ è accettabile, in quanto interna all'intervallo compatto $[-2, 1]$. Quindi:

$$\exists ! \xi \in (-2, 1) \mid \frac{f(-2) - f(1)}{-2 - 1} = f'(\xi)$$

Nella figura (1) riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[-2, 1]$. In tale grafico è riportata la retta secante congiungente i punti $A(-2, 6)$, $B(1, 0)$, e la retta tangente passante per $(\xi_1, f(\xi_1)) = (-1, 0)$.

Esercizio 6

Assegnata la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4},$$

mostrare che essa verifica il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 1]$ e trovare il punto ξ.

***

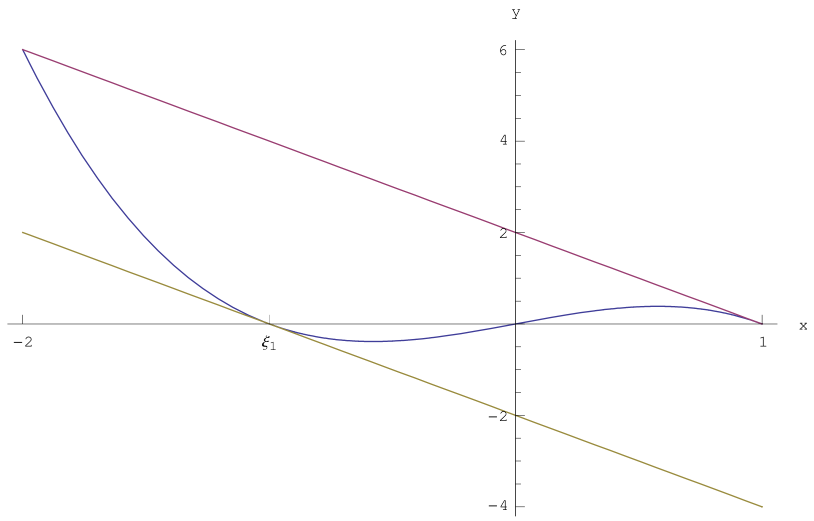

Figure 1: Grafico della funzione nell'intervallo $[-2,1]$. Sono tracciate la secante per $A(a,f(a)), B(b,f(b))$, e la tangente per $(\xi,f(\xi))$.

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto la derivata prima:

$$f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \tag{2}$$

Le ipotesi del teorema di Lagrange sono verificate, per cui:

$$\exists \xi \in (-1,1) \mid \frac{f(-1)-f(1)}{-1-1}=f'(\xi)$$

Per determinare i punti ξ dobbiamo risolvere l'equazione:

$$f'(\xi)=0 \tag{3}$$

Dalla (2) si ottiene $\xi=0$. Quindi:

$$\exists! \xi \in (-1,1) \mid \frac{f(-1)-f(1)}{-1-1}=f'(\xi)$$

Esercizio 7

Assegnata la funzione:

$$f(x)=x^3-12x,$$

mostrare che essa verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0,2\sqrt{3}\right]$ e trovare i punti $x_0 \in \left(0,2\sqrt{3}\right)$ tali che $f'(x_0)=0$.

***

Soluzione
Le ipotesi del teorema di Rolle sono banalmente verificate, per cui:

$$\exists x_0 \in \left(0, 2\sqrt{3}\right) \mid f'(x_0) = 0$$

Per determinare i punti x_0 dobbiamo risolvere l'equazione:

$$f'(x_0) = 0 \tag{4}$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 4\right),$$

donde la (4) diventa:

$$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2,$$

di cui solo la soluzione $x_0 = 2$ è accettabile, in quanto interna all'intervallo compatto $\left[0, 2\sqrt{3}\right]$. Quindi:

$$\exists! x_0 \in \left(0, 2\sqrt{3}\right) \mid f'(x_0) = 0$$

Nella figura (2) riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $\left[0, 2\sqrt{3}\right]$.

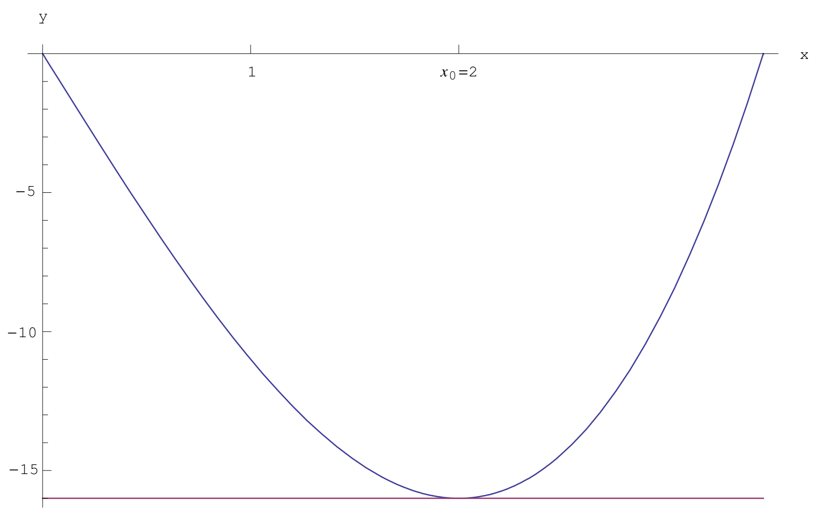

Figure 2: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 8

La funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$$

verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 4]$?

***

Soluzione
f non è continua in $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty,$$

per cui viene violata una delle ipotesi del teorema di Rolle. Ci si aspetta quindi:

$$\nexists x_0 \in (0,4) \mid f'(x_0) = 0 \tag{5}$$

Ciò è confermato da un calcolo diretto della derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$$

Infatti:

$$\nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2-4x+8 = 0$$

donde la (5).

Esercizio 9

Servendosi del teorema di Lagrange, dimostrare la relazione:

$$\sin(x+\Delta x) = \sin x + \Delta x \cos(x+\theta\Delta x), \quad \text{con } 0<\theta<1$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) = \sin x \tag{6}$$

Comunque prendiamo un incremento Δx della variabile indipendente, la funzione (6) verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo compatto $[0,\Delta x]$, donde:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(\xi), \quad \text{con } \xi \in (x, x+\Delta x)$$

Cioè:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cos\xi$$

Osserviamo che il punto interno ξ all'intervallo $[x,\Delta x]$ può essere espresso come $\xi = x+\theta\Delta x$, essendo θ un opportuno numero reale compreso tra 0 e 1. Quindi:

$$\sin(x+\Delta x) = \sin x + \Delta x \cos(x+\theta\Delta x), \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Esercizio 10

Determinare le coordinate cartesiane di un punto P_0 appartenente al segmento di parabola $y = x^2$ compreso tra i punti $A\left(a, a^2\right)$ e $B\left(b, b^2\right)$ tale che la tangente alla parabola in P_0 sia parallela alla corda AB.

***

Soluzione
Per il teorema di Lagrange:

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0),$$

avendo posto

$$f(x) = x^2$$

Quindi l'ascissa del punto richiesto è la soluzione dell'equazione:

$$2x_0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cioè:

$$2x_0 = b + a \Longrightarrow x_0 = \frac{a + b}{2}$$

Perciò:

$$P_0\left(\frac{a + b}{2}, \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}\right)$$

Esercizio 11

Determinare il punto $\xi \in (a, b)$ richiesto dal teorema di Lagrange applicato alla funzione:

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3$$

***

Soluzione
Per il teorema di Lagrange:

$$\exists x_0 \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0),$$

La derivata della funzione è:

$$f'(x) = 6x + 4$$

Quindi ξ è la soluzione dell'equazione:

$$2\xi = a + b$$

Cioè:

$$\xi = \frac{a+b}{2}$$

Esercizio 12

Esaminare l'applicabilità del teorema di Rolle per la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x+2},$$

nell'intervallo $[0, 4]$.

***

Soluzione
In $[0, 4]$ la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Pertanto:

$$\exists x_0 \in (0, 4) \mid f'(x_0) = 0$$

Infatti:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$$

e i suoi zeri sono:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3} = 2\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$$

Quindi:

$$2\left(\sqrt{3} - 1\right) = x_0\,(0, 4) \mid f'(x_0) = 0$$

Esercizio 13

Determinare un valore approssimato di $\sqrt[6]{65}$, utilizzando il teorema di Lagrange.

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) = \sqrt[6]{x} \tag{7}$$

Tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $\forall \Delta x > 0$. Quindi:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x), \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Prendiamo $x_0 = 64$, $\Delta x = 1$

$$f(65)-f(64)=f'(64+\theta)$$

Tenendo conto della (7) e della sua derivata prima:

$$\sqrt[6]{65}=2+\frac{1}{\sqrt[6]{(64+\theta)^5}}, \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Assegnando un valore a θ in $(0,1)$ si ottiene un valore approssimato di $\sqrt[6]{65}$.

Esercizio 14

Servendosi del teorema di Lagrange dimostrare:

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, \qquad \forall x\in(-1,+\infty)$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x)=\ln x \tag{8}$$

Tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[x_0, x_0+\Delta x]$, $\forall x_0>0$ e per ogni Δx tale $(x_0+\Delta x)\in(0,+\infty)$. Quindi:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x), \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Prendiamo $x_0 = 1$, $\Delta x = x$

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\frac{1}{1+\theta x}$$

da cui:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} & x>0 \Longrightarrow 1<1+\theta x<1+x \Longrightarrow 1>\frac{1}{1+\theta x}>\frac{1}{1+x} \\ & \Longrightarrow x>\frac{x}{1+\theta x}>\frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

Quindi:

$$x > \ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta\Delta x} > \frac{x}{1+x}$$

Per $x \in (-1,0)$:

$$x \in (-1,0) \Longrightarrow 1 > 1+\theta x > 1+x \Longrightarrow 1 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$$
$$\underset{x\in(-1,0)}{\Longrightarrow} x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$$

Quindi:

$$x > \ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta\Delta x} > \frac{x}{1+x}$$

Esercizio 15

Servendosi del teorema di Lagrange dimostrare:

$$\sqrt{1+x} < 1+x, \qquad \forall x \in (-1,+\infty)$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) = \sqrt{x} \tag{9}$$

Tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[x_0, x_0+\Delta x]$, $\forall x_0 \geq 0$ e per ogni Δx tale $(x_0+\Delta x) \in [0,+\infty)$. Quindi:

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\Delta x), \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Prendiamo $x_0 = 1$, $\Delta x = x$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\theta x}}$$

da cui:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}$$

Abbiamo:

$$x > 0 \Longrightarrow \sqrt{1+\theta x} < \sqrt{1+x} \Longrightarrow \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

Moltiplichiamo l'ultima disuguaglianza per $\sqrt{1+x}$:

$$1+x>\sqrt{1+x}+\frac{x}{2}\Longrightarrow\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

Per $x\in(-1,0)$:

$$x\in(-1,0)\Longrightarrow\sqrt{1+\theta x}>\sqrt{1+x}\underset{x\in(-1,0)}{\Longrightarrow}\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}>\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$
$$\Longrightarrow\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}>1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

Moltiplichiamo l'ultima disuguaglianza per $\sqrt{1+x}$:

$$1+x>\sqrt{1+x}+\frac{x}{2}\Longrightarrow\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

Esercizio 16

Mostrare che la funzione

$$f(x)=\sin x$$

verifica il teorema di Rolle in $[0,\pi]$, e trovare il corrispondente valore x_0.

***

Soluzione
La funzione assegnata soddisfa banalmente le ipotesi del teorema di Rolle. Il punto corrispondente è tale che:

$$f'(x_0)=0$$

cioè:

$$\cos x_0=0$$

E siccome stiamo considerando l'intervallo $[0,\pi]$, l'unica soluzione di tale equazione goniometrica è $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 17

Mostrare che la funzione

$$f(x)=x^3$$

verifica il teorema di Lagrange in $[0,6]$, e trovare il corrispondente valore x_0.

***

Soluzione
La funzione assegnata soddisfa banalmente le ipotesi del teorema di Lagrange in $[0,6]$. Quindi:

$$\exists x_0 \in (0,6) \mid \frac{f(6)-f(0)}{6} = f'(x_0),$$

cioè:

$$f'(x_0) = 36$$

La derivata della funzione è $f'(x) = 3x^2$, per cui:

$$3x^2 = 36 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

La soluzione accettabile è $x_0 = 2\sqrt{3}$.

Esercizio 18

Mostrare che la funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

verifica il teorema di Lagrange in $[\alpha, \beta]$, e trovare il corrispondente valore ξ.

***

Soluzione
La funzione assegnata soddisfa banalmente le ipotesi del teorema di Lagrange in $[\alpha, \beta]$, per ogni $\alpha < \beta$. Quindi:

$$\exists \xi \in (\alpha, \beta) \mid \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi) \Longleftrightarrow a(\beta+\alpha) + b = f'(\xi)$$

La derivata della funzione è $f'(x) = 2ax + b$, per cui:

$$a(\beta+\alpha) + b = 2a\xi + b \Longrightarrow \xi = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Esercizio 19

Mostrare che la funzione

$$f(x) = \ln x$$

verifica il teorema di Lagrange in $[1, 2e]$, e trovare il corrispondente valore ξ.

***

Soluzione
La funzione assegnata soddisfa banalmente le ipotesi del teorema di Lagrange in $[1, 2e]$. Quindi:

$$\exists \xi \in (1, 2e) \mid \frac{f(2e) - f(1)}{2e - 1} = f'(\xi) \Longleftrightarrow \frac{1 + \ln 2}{2e - 1} = \frac{1}{\xi}$$

cioè:

$$\xi = \frac{2e - 1}{1 + \ln 2}$$

Esercizio 20

Servendosi del teorema di Lagrange, dimostrare:

$$\tan x > x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) = \tan x$$

Abbiamo:

$$\forall x_0, \Delta x \mid [x_0, x_0 + \Delta x] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \ \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x), \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

giacchè in ogni intervallo compatto contenuto in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione verifica le ipotesi del teorema di Lagrange. Ora poniamo:

$$x_0 = 1, \ \Delta x = x$$

Quindi:

$$[x_0, x_0 + \Delta x] = \begin{cases} [1, x], & \text{se } x > 1 \\ [x, 1], & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{f(1 + x) - f(1)}{x} = f'(1 + \theta x)$$

cioè:

$$\tan x = \frac{x}{\cos^2(1 + \theta x)}$$

Osservando che il periodo fondamentale di $\cos^2(1 + \theta x)$ è $T = \frac{\pi}{\theta} > \pi$, donde:

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^2(1 + \theta x) < 1\Big) \Longrightarrow \tan x > x, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Esercizio 21

Servendosi del teorema di Lagrange, dimostrare che l'equazione:

$$e^x = 1 + x,$$

è compatibile e determinata in $\mathbb{R}$, la cui unica soluzione nel campo reale è $x = 0$.

***

Soluzione
Per dimostrare l'asserto basta provare che:

$$\nexists x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid e^x = 1 + x \tag{10}$$

Poniamo:

$$f(x) = e^x \tag{11}$$

Per il teorema di Lagrange:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x), \text{ con } 0 < \theta < 1$$

Cioè:

$$\frac{e^{x_0} e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x} \Longleftrightarrow \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{\theta \Delta x}$$

Assumendo come incremento della variabile indipendente $\Delta x = x$:

$$e^x = 1 + x e^{\theta x}, \quad \text{con } 0 < \theta < 1 \tag{12}$$

Ora:

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow 1 + x e^{\theta x} > 1 + x$$

Per la (12):

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, e^x > 1 + x,$$

cioè la (10).