SERIE A TERMINI POSITIVI – ESERCIZI SVOLTI

1) Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}$.

Basta confrontare la serie con la serie geometrica di ragione $1/2$, dato che $2^{-n^2} \leq 2^{-n}$ $\forall n \geq 1$. Quindi la serie converge.

1)bis La stessa serie si può trattare con il criterio della radice asintotico, dato che $(2^{-n^2})^{1/n} = 2^{-n} \to 0$.

1)ter La stessa serie si può trattare con il criterio del rapporto asintotico, dato che

$$\frac{2^{-(n+1)^2}}{2^{-n^2}} = 2^{-2n-1} = \frac{1}{2}2^{-2n} \to 0.$$

2) Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!\,(n-3)}$.

Notiamo che per $n \geq 4$ si ha $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$, per cui per $n \geq 4$ si ha $\displaystyle\frac{n^3+5}{n!\,(n-3)} \leq \frac{n^3+5}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}$.

Confrontiamo quest'ultima successione con la successione $1/n^2$: si ha

$$\lim_n \frac{n^2(n^3+5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}$$
$$= \lim_n \frac{1+5n^{-3}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})^2} = 1,$$

per cui le serie

$$\sum \frac{n^3+5}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2} \qquad e \sum \frac{1}{n^2}$$

hanno lo stesso carattere. La seconda è una serie armonica generalizzata di parametro $2 > 1$ e quindi converge.

2)bis La stessa serie si può trattare con il criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_n \frac{((n+1)^3+5)}{(n+1)!(n-2)} \frac{n!(n-3)}{(n^3+5)}$$
$$= \lim_n \frac{((n+1)^3+5)}{(n^3+5)} \frac{(n-3)}{(n-2)} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

3) Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\log n^2)^n}$.

Sappiamo che per $n \geq 1$ si ha

$$\frac{\pi}{4} \leq \arctan n \leq \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\log n^2)^n} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n}.$$

Dunque per il criterio del confronto (applicato due volte) la nostra serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n},$$

alla quale si applica facilmente il criterio della radice asintotico. Dato che

$$\lim_n \frac{1}{(\log n^2)} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{1}{\log n} = 0, \text{ la serie converge.}$$

4) Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n} x^n$ $(x > 0)$ e calcolarne la somma quando finita.

La serie è a termini positivi. Notiamo che si ha

$$\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/3 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

possiamo quindi scrivere la ridotta $2n+1$-ima come

$$s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} 3x^{2k+1}, \text{ quindi}$$

$$\lim_n s_{2n+1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k + 3x \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k.$$

Entrambe le serie convergono $\iff x^2 < 1$ e quindi la nostra serie converge $\iff x < 1$.

Ricordando che la somma della serie geometrica di ragione z con $|z| < 1$ è $1/(1-z)$, si può calcolare la somma della serie (per $|x| < 1$), che vale

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(1-x^2)} + 3x \frac{1}{(1-x^2)} = \frac{(1+9x)}{3(1-x^2)}.$$

5) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}$$

Osserviamo che vale la doppia diseguaglianza

$$1 \leq 2+\sin n \leq 3,$$

e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Inoltre valgono le diseguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Applicando due volte il criterio del confronto si ottiene che il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

A sua volta, applicando il criterio del confronto asintotico, possiamo sostituire a $(n+1)$ semplicemente n (ovviamente$\lim_n \dfrac{n+1}{n} = 1$), ottenendo così la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Questa serie diverge perchè $\dfrac{2}{3} < 1$.

6) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}$$

Osserviamo che vale la diseguaglianza

$$0 \leq n^2-1 \leq n^2+\sin(e^n), \qquad \text{per ogni } n \geq 1$$

e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Notando che si ha

$$\lim_n \frac{n^2+\sin(e^n)}{n^2} = 1,$$

si ha, per il criterio del confronto asintotico, che la nostra serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n n^2.$$

Possiamo confrontare questa serie con una serie geometrica di ragione α con $1 > \alpha > \frac{2}{3}$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha

$$\lim_n \frac{(3/4)^n}{(2/3)^n n^2} = \lim_n \left(\frac{9}{8}\right)^n \frac{1}{n^2} = +\infty,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico, la nostra serie converge, convergendo la serie geometrica di ragione $\frac{3}{4}$.

6) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 1}}$$

La serie è evidentemente a termini positivi, per cui o converge o diverge positivamente. Applichiamo il criterio del confronto asintotico con la serie relativa alla successione

$$n^{-\frac{15-6}{7}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Si ha infatti

$$\lim_n n^{\frac{9}{7}} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 1}} = \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^9(n^6 + n^3)}{n^{15} + 1}}$$

$$= \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^{15} + n^{12}}{n^{15} + 1}} = \lim_n \sqrt[7]{\frac{1 + n^{-3}}{1 + n^{-15}}} = 1$$

Quindi il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/7}},$$

che è convergente poichè $\frac{9}{7} > 1$.

7) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{1}{4}} \log(n^n + n!)}$$

Si ha

$$\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}} \leq 1 - n^{\frac{3}{5}} \leq 0 \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

mentre, dato che $n^n + n! > 1$,

$$\log(n^n + n!) > 0 \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

quindi la serie è a termini *negativi* e dunque o converge o diverge *negativamente*. Applichiamo il criterio del confronto. Dato che si ha

$$\lim_n \frac{\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}}}{-n^{\frac{3}{5}}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\log(n^n + n!)}{n \log n} &= \lim_n \frac{\log(n^n(1 + (n!/n^n))}{n \log n} \\
&= \lim_n \frac{\log(n^n) + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} \\
&= \lim_n \frac{n \log n + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} = 1,
\end{aligned}$$

il carattere della serie in questione è uguale a quello della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{1}{4}} n \log n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{20}} \log n}.$$

Possiamo applicare il teorema del confronto . Dato che $\frac{13}{20} < 1$ possiamo fare il confronto con una serie armonica generalizzata divergente del tipo $-\sum n^{-\alpha}$, con $\frac{13}{20} < \alpha < 1$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha

$$\lim_n \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{13}{20}} \log n} = \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}}}{\log n} = +\infty,$$

e quindi la nostra serie diverge (negativamente).

8) Sia E l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sia divergente. Calcolare $\sup E$.

La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del confronto asintotico, ricordando che

$$\lim_n \frac{\log n}{n^2} = 0, \qquad \lim_n \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1,$$

e quindi il carattere della serie in questione è lo stesso del carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} |\log n|^{\frac{1}{2}}}.$$

Questa serie è convergente se $\dfrac{\alpha - 2}{2} > 1$ (per confronto con la serie $\sum n^{(2-\alpha)/2}$), mentre diverge per $\dfrac{\alpha-2}{2} \leq 1$ (per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n|\log n|^{\frac{1}{2}}}$). Dunque si ha

$$E = \{\alpha \in \mathbf{R} : \ \frac{\alpha-2}{2} \leq 1\} =]-\infty, 4],$$

e $\sup E = 4$.

9) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

La serie è a termini strettamente positivi. La presenza del fattoriale ci suggerisce l'applicazione del criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{(2n+1)2}.$$

Dato che $\quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e, \ \ \dfrac{1}{(2n+1)2} \to 0,$

si ha $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$. Dunque per il criterio del rapporto asintotico la serie converge.

NOTA: come corollario dell'esercizio 10 si ha che

$$\lim_n \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

ESERCIZIO: dimostrarlo per via diretta.

10) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n \log n}}.$$

La serie è a termini positivi. La presenza della potenza n-ima ci invita all'applicazione del criterio della radice. Si ha

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{3^{\log n}}.$$

Osserviamo (dalla def. di log) che

$$3^{\log n} = e^{\log 3 \log n} = n^{\log 3},$$

per cui

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^{\log 3}} = \frac{1}{n^{\log 3 - 1}} \to 0;$$

quindi la serie converge per il criterio della radice asintotico.

NOTA: come corollario dell'esercizio 10 si ha che

$$\lim_n \frac{n^n}{3^{n \log n}} = 0.$$

ESERCIZIO: dimostrarlo per via diretta.

11) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}.$$

La serie è a termini positivi. La presenza della potenza n-ima ci invita all'applicazione del criterio della radice, ottenendo

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2^n} \to 0.$$

Dunque la serie è convergente per il criterio della radice asintotico.

12) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}).$$

Osserviamo che vale il limite

$$\lim_n n\log(1+\frac{1}{n}) = 1.$$

Infatti si ha

$$n\log(1+\frac{1}{n}) = \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n;$$

basta ricordare che $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, e che quindi il limite vale $\log e = 1$. Dunque per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hanno lo stesso carattere. Dunque la serie in questione diverge positivamente.

13) Provare che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-\frac{1}{n}) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

hanno lo stesso carattere.

Entrambe le serie sono a termini negativi. Usiamo il criterio del confronto asintotico, calcolando il limite

$$\lim_n \big(-n\log(1-\frac{1}{n})\big) = \lim_n \log\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-n}.$$

Si ha

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-n} = \frac{1}{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n} = \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^n$$

$$= \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^n = \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big) \to e\cdot 1,$$

e quindi

$$\lim_n \big(-n\log(1-\frac{1}{n})\big) = \log e = 1.$$

Questo prova che le due serie hanno lo stesso carattere (divergono entrambe negativamente).

14) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \Big)$$

Dedurne la convergenza della serie armonica generalizzata di parametro $\lambda \geq 2$.

Basta notare che la ridotta n-ima vale

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto asintotico e quindi converge anche la serie armonica generalizzata di parametro 2. Se $\lambda > 2$ allora

$$\frac{1}{n^\lambda} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n$$

e quindi convergono anche le serie armoniche generalizzate di parametro $\lambda > 2$

ALTRI ESERCIZI SVOLTI SULLE SERIE

1) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

La serie non è a termini di segno definito, quindi non si possono applicare i relativi criteri. Possiamo cercare di applicare il teorema della convergenza assoluta. Si ha

$$\Big|\frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}\Big| = \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}},$$

ora a termini positivi, possiamo applicare il criterio del confronto, ricordando che $|\cos n| \leq 1$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico quest'ultima serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}},$$

che è convergente poichè $\frac{4}{3} > 1$. Dunque la serie di partenza è assolutamente convergente, e quindi converge.

2) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\, 3^{n+2}}{n!}$$

Tenendo presente che si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}$$

cerchiamo di trasformare la nostra serie in questa forma. Per prima cosa scriviamo

$$2^{n-1}\ 3^{n+2} = 2^n 2^{-1} 3^n 3^2 = \frac{9}{2} 6^n,$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}.$$

Sommando e sottraendo la quantità

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2} \frac{6^0}{0!},$$

si ottiene

$$\frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - 1) = \frac{9}{2}(e^6 - 1).$$

3) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!}$$

Cerchiamo di ottenere un'esponenziale. Prima di tutto cambiamo variabile ponendo $k = n - 1$, per cui

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^k}{k!};$$

quindi sommando e sottraendo $1 = (-\sqrt{2})^0$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^k}{k!} - 1 = e^{-\sqrt{2}} - 1,$$

e infine

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} = 2(e^{-\sqrt{2}} - 1).$$

4) Trovare il numero reale x tale che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}x^{n-1}}{(n-1)!} = -3.$$

Possiamo riscrivere la serie come

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}x^{n-1}}{(n-1)!} = 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$= 4\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1\Big) = 4(\exp(2x) - 1),$$

quindi dobbiamo risolvere l'equazione

$$4(\exp(2x) - 1) = -3, \qquad \text{ovvero} \qquad \exp(2x) = \frac{1}{4},$$

da cui

$$2x = \log\frac{1}{4}, \qquad \text{e infine} \qquad x = \frac{1}{2}\log\frac{1}{4} = -\log 2.$$