Discutere il carattere delle seguenti serie:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan n}{\sqrt{n^6+1}}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

6. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 + \sqrt{n}}{n}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-e^{\frac{1}{n^2}})$$

9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^{\alpha}}} - 1 \right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} \right)^{\log n}$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a + a^n} \qquad a > 0$$

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2 + 3n^4 x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (2n)!}{(n!)^2}$$

19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$$

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^{\log n}}, \qquad a > 0$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^n} \left[\log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \right]^n$$

22.
$$\sum_{n=2}^{\infty} 2 \cos^n x \frac{n}{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + (-1)^{n+1}}}$$

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

25.
$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log(1+n)]^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

26.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^3 (2n)!}$$

27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{n e^{n^2}}$$

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$$

29.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + |x|^n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

31.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}$$

32.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + |x|^n), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

33.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{\lambda n^2 + n + 1}, \quad \forall\, \lambda \neq -\frac{k+1}{k},\ k \in \mathbb{N}$$

34.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(n+1)!]^2 - 2^n}$$

35.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan \lambda)^n}{n^2}, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

36.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + |x|^n + |y|^n), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

37.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{x}{2^n}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

38.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n^2}}{n!}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

39.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^n \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

40.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} \sinh \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Soluzioni

1. La serie è a termini positivi, possiamo quindi applicare il criterio del rapporto, ad esempio:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$
quindi la serie converge.

2. La serie è a termini positivi e risulta
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = 1$$
quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge.

3. La serie è a termini positivi e risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n \arctan n}{\sqrt{n^6+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \arctan n}{n^3 \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = \frac{\pi}{2}$$
quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

4. La serie è a termini positivi e risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$
quindi per il criterio del rapporto la serie è convergente.

5. La serie è a termini di segno alterno e risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = 0$$
e la successione $(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n})$ è decrescente, come si intuisce meglio dalla seguente uguaglianza:
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
Per il criterio di Leibniz la serie convergente.

6. La serie è a termini positivi e inoltre la successione $(\frac{1}{n \log n})$ è decrescente quindi, per il criterio di condensazione di Cauchy [1], si ha che la nostra serie si comporta come la serie seguente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log 2}$$
la quale è chiaramente divergente.

[1] **Criterio di condensazione di Cauchy.** *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi e sia la* (a_n) *una successione non crescente. Allora la serie data ha lo stesso carattere della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

7. La serie è a termini positivi e risulta:

$$\frac{\cos n^2 + \sqrt{n}}{n} \geq \frac{1}{n}$$

sicuramente per ogni $n \geq 4$ quindi per il criterio del confronto la serie data è divergente.

8. Poiché $\frac{1}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $1 - e^{\frac{1}{n^2}} < 0 \forall n \in \mathbb{N}$ quindi la serie è a termini negativi. Possiamo allora scrivere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{\frac{1}{n^2}}) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

e studiare la serie a secondo membro che è una serie a termini positivi moltiplicata per una costante non nulla.Sfruttando un noto limite notevole si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

E la serie è quindi divergente per il criterio del confronto asintotico.

9. La serie è a termini di segno qualunque. Si ha subito che se $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i termini della serie sono tutti nulli e quindi la serie convergerà a 0. Se invece $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ allora $\sin x = 1$ e la serie diventa la serie armonica.Se $x = (4k+1)\frac{3}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ allora $\sin x = -1$ la serie diventa:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che, per il criterio di Leibniz, è convergente. Per tutti gli altri casi studiamo l'assoluta convergenza;si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x|^{n+1}}{n+1} \frac{n}{|\sin x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |\sin x| = |\sin x| < 1$$

quindi, per il criterio del rapporto, la serie è assolutamente convergente.

10. La serie è a termini positivi. Per $\alpha \leq 0$ il termine generale della serie è una successione non infinitesima quindi la serie sarà divergente. Sia quindi $\alpha > 0$, si ha (razionalizzando):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} + 1} = 1$$

cioé la serie si comporta come la serie armonica generalizzata quindi è convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $0 < \alpha \leq 1$.

11. La serie è a termini di segno alterno e risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{n} = 0$.Proviamo che la successione $(\frac{\sqrt{n+1}-1}{n})$ è decrescente.Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ per $x \geq 1$; si ha:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - (\sqrt{x+1} - 1)}{x^2} = \frac{-x - 2 + 2\sqrt{x+1}}{2x^2\sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x+1} \geq x+2 \Leftrightarrow 4x+4 \geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2 \leq 0$$

La funzione f è decrescente in $[1,+\infty)$ e quindi anche la successione $(\frac{\sqrt{n+1}-1}{n})$ lo è. Possiamo applicare il criterio di Leibniz ottenendo quindi che la serie data è convergente.

12. La serie è a termini di segno alterno e risulta:

$$(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = (-1)^n \frac{2}{n+1} + (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$$

La serie di termine generale $(-1)^n \frac{2}{n+1}$ è convergente per il criterio di Leibniz mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ è assolutamente convergente [2].

La serie di partenza è quindi convergente in quanto somma di due serie convergenti, ma non è assolutamente convergente (confronta con $\frac{1}{n}$).

13. La serie è a termini di segno alterno. Studiamo l'assoluta convergenza.

$$\left| (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n} \right| = \frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \forall\, n > e^2$$

in quanto $\log n > 2\,, \forall\, n > e^2$.
La serie è quindi assolutamente convergente.

14. La serie è a termini positivi e risulta:

$$\frac{1}{n^a + a^n} \leq \frac{1}{n^a} \qquad \forall\, a > 0$$

Se $a > 1$ la serie è convergente per il criterio del confronto. Sia $0 < a \leq 1$, si ha:

$$a^n \leq 1 \qquad \text{ed} \qquad n^a \leq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^a + a^n} \geq \frac{1}{n+1}$$

per cui la serie data diverge.

15. La serie è a termini positivi, applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{3^n n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{3} < 1$$

quindi la serie è convergente.

16. Osserviamo subito che la serie, per $x = 0$, è convergente e ha per somma zero.Sia adesso $x \neq 0$; si ha :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2+3n^4x^2} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3n^4x^2}$$

[2] Vedi serie di Mengoli.

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3n^4x^2}$; essa è a termini positivi e risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2+3n^4x^2}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{3x^2}$$

La serie suddetta è convergente e quindi anche la serie al secondo membro (ovvero quella data) lo è.

17. La serie è assolutamente convergente, infatti:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

18. La serie è a termini positivi e risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \frac{(n!)^2}{n^3(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} = 4$$

quindi la serie, per il criterio del rapporto, diverge.

19. La serie è a termini positivi e risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \log \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

Per cui la serie data è divergente.

20. La serie è a termini positivi; applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{n^{\log n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^{\frac{\log n}{n}}} = a$$

in quanto

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\log n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n^{\frac{\log n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log^2 n}{n}} = 1$$

Se $0 < a < 1$ la serie converge mentre se $a > 1$ la serie diverge. Se $a = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$ che è stata studiata nell'esercizio 13.

21. Applicando il criterio della radice si ha che la serie èconvergente.

22. La serie è di segno qualsiasi. Osserviamo subito che se $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ allora $\cos x = 0$ e la serie converge quindi a zero.
Se invece $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ allora $\cos x = 1$ e la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1}$ che è chiaramente divergente. Se $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ allora la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n-1}$ la quale è oscillante in quanto la successione $(\frac{n}{n-1})$ non è infinitesima ed è monotona [3] Esaminiamo i casi restanti ovvero quelli per

[3] Vale il seguente risultato:
Proposizione*Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *una serie con* $a_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*Se* $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ *e* (a_n) *è monotona allora la serie è oscillante.*

cui $0 < |\cos x| < 1$. Consideriamo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} |\cos x|^n \frac{n}{n-1}$ dei valori assoluti e calcoliamo:

$$\lim_{n\to\infty} |\cos x|^{n+1} \frac{n+1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{1}{|\cos x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2} |\cos x| = |\cos x| < 1$$

Per il criterio del rapporto la serie viene quindi assolutamente convergente.

23. La serie è a termini di segno alterno;la successione $(\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}}})$ è infinitesima, vediamo se essa è anche decrescente.
Si ha:

$$(n+1)^2 + (-1)^{n+2} \geq n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n \geq n^2 + (-1)^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + (-1)^{n+2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + (-1)^{n+1}}}$$

cioé la successione è decrescente.
Per il criterio di Leibniz si ha quindi che la serie data converge.

24. Se $x = 0$ la serie converge a zero. Supponiamo adesso che $x \neq 0$ e consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{|x|}{n})^n$ dei valori assoluti.Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)! \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{n!} \frac{n^n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{e}$$

Se $|x| < e$ la serie è assolutamente convergente.
Se $x > e$ allora, sempre per il criterio del rapporto (applicabile perché la serie è a termini positivi), la serie risulta divergente.
Sia $x < -e$; la serie è a termini di segno alterno e si scrive come

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! \frac{|x|^n}{n^n}$$

La successione $(a_n) = (n!\frac{|x|^n}{n^n})$ è crescente definitivamente [4] quindi il suo limite è non nullo;da quanto visto segue che la serie è oscillante. Se $x = -e$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! \frac{e^n}{n^n}$. Si ha:

$$(n+1)! \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{n!} \frac{n^n}{e^n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1^5.$$

Allora la successione è crescente e non infinitesima per cui la serie risulta oscillante.

[4] Abbiamo poco fa visto che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{e} > 1$ quindi, per le proprietà delle successioni, si avrà , definitivamente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ cioé $a_{n+1} > a_n$.

[5] Vedi determinazione del $\lim_{n\to\infty} \; 1 + \frac{1}{n} \; ^n$.

Sia $x = e$ e detta $(a_n) = (n!\frac{e^n}{n^n})$ valutiamo la quantità $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1\right] < 0\,^6.$$

Per il criterio di Raabe la serie risulta divergente.

25. La serie è a termini positivi e si osserva subito che se $x \geq 0$ il termine generale non è infinitesimo quindi la serie sarà divergente. Sia $x < 0$ allora la serie si scrive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^{|x|}}$$

In generale si ha che $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log^{\alpha} n} = \infty, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ quindi da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{[\log(n+1)]^{|x|}} = \infty$$

per il criterio del confronto, segue che la serie è divergente.

26. La serie è convergente e lo si vede applicando il criterio del rapporto oppure osservando che:

$$\frac{(n!)^2}{n^3(2n)!} = \frac{n!n!}{n^3 n!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{1}{n+1}\,\frac{2}{n+2}\,\frac{3}{n+3}\cdots\frac{n}{n+n} < \frac{1}{n^3}$$

e usando il criterio del confronto.

27. La serie è a termini positivi e si ha :

$$\frac{\sqrt{(n+1)!}}{ne^{n^2}} \leq \frac{(n+1)!}{ne^{n^2}}$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie $(*)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{ne^{n^2}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)e^{(n+1)^2}}\,\frac{ne^{n^2}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)e^{2n+1}} = 0$$

La serie $(*)$ è convergente e, per il criterio del confronto, tale è anche la serie di partenza.

28. La serie è a termini positivi e risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)} = 1$$

quindi la serie sarà divergente.

[6] Vedi nota precedente.

29. La serie è a termini positivi e si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt[n]{n}} = 1$$

quindi la serie diverge.

30. Osserviamo subito che per $x = 0$ la serie ha somma nulla. Se $|x| \geq 1$ risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{1+|x|^n} \neq 0$ quindi la serie non può convergere (in particolare diverge se $x > 0$ e oscilla se $x < 0$).
Sia adesso $|x| < 1$; risulta

$$\frac{|x|^n}{1+|x|^n} \leq |x|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi per il criterio del confronto la serie data converge.

31. La serie è a termini positivi e per la crescenza della funzione $\log x$ si ha che:

$$(*) \qquad \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{\log 2}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

D'altra parte la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ è divergente in quanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Per la (*) si ha quindi la divergenza della serie di partenza.

32. Osserviamo subito che per $x = 0$ la serie converge a zero. Sia adesso $x \neq 0$;la serie è a termini positivi e si ha che per $|x| > 1$ il termine generale tende a $+\infty$ quindi la serie diverge.

Supponiamo ora che $|x| < 1$ e ricordiamo che vale la seguente diseguaglianza: $\log(1+y) \leq y$, $\forall\, y \in (-1, +\infty)$. Si ha quindi:

$$\log(1+|x|^n) \leq |x|^n \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ è convergente in quanto $|x| < 1$.

33. Osserviamo subito che $\lambda = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ che è divergente. Se $\lambda > 0$ risulta:

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lambda n}}{\lambda n^2 + n + 1} = +\infty$$

quindi la serie non può convergere.

Studiamo il segno del denominatore: il discriminante dell'equazione $\lambda n^2 + n + 1 = 0$ è $1 - 4\lambda$ quindi se $\lambda > \frac{1}{4}$ la serie è a termini positivi e, per l'osservazione precedente, sarà divergente. Se $\lambda = \frac{1}{4}$ vale esattamente lo stesso discorso.

Sia adesso $\lambda < \frac{1}{4}$; se $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ allora risulta $\frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda} < 1$ quindi il denominatore avrà segno positivo per ogni n cioé la serie è a termini positivi.Poiché vale la (*) la serie sarà divergente.

Sia adesso $\lambda < 0$ e consideriamo la serie dei valori assoluti. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lambda(n+1)}}{|\lambda(n+1)^2+n+2|} \frac{|\lambda n^2+n+1|}{e^{\lambda n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda n^2+n+1|}{|\lambda(n+1)^2+n+2|} e^{\lambda} = e^{\lambda}$$

e poiché $\lambda < 0$ risulta $e^{\lambda} < 1$ quindi per il criterio del rapporto la serie risulta convergente e quella data è dunque assolutamente convergente.

34. Osserviamo subito che vale la seguente diseguaglianza: $(n+1)! \geq 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ per cui $[(n+1)!]^2 - 2^n > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Studiamo la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(n+1)!]^2}$. Per quanto precedentemente osservato risulta

$$[(n+1)!]^2 - 2^n > [(n+1)!]^2 - (n+1)! = (n+1)![(n+1)!-1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{[(n+1)!]^2 - 2^n} < \frac{1}{(n+1)![(n+1)!-1]} \quad \forall, n \in \mathbb{N}$$

Applichiamo alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)![(n+1)!]-1}$ il criterio del rapporto; risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)![(n+1)!-1]}{(n+2)![(n+2)!-1]} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2(1-\frac{1}{(n+1)!})}{(n+2)^2[(n+1)!]^2(1-\frac{1}{(n+2)!})} = 0$$

quindi la serie è convergente e quella data assolutamente convergente.

35. Se $|\arctan\lambda| \leq 1$ allora

$$\frac{|\arctan\lambda|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie data, per il criterio del confrento, è assolutamente convergente.

Se $\arctan\lambda > 1$ la serie è a termini positivi e applicando il criterio del rapporto si trova che la serie è divergente.

Sia infine $\arctan\lambda < -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|arctan\lambda|^n}{n^2}$. La successione dei termini generali della serie non è infinitesima per $n \longrightarrow +\infty$ (è del tipo $\frac{a^n}{n^2}$, con $a > 1$) ed è definitivamente crescente quindi la serie data è oscillante.

36. La serie è a termini positivi e si ha subito che se $|x| \geq 1$ oppure $|y| \geq 1$ il termine generale non tende a zero quindi la serie diverge.

Supponiamo adesso che $|x| < 1$ e $|y| < 1$. Risulta (vedi es. 32) $\log(1 + |x|^n + |y|^n) \leq |x|^n + |y|^n$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(|x|^n + |y|^n)$ è convergente in quanto somma di serie convergenti. Per il criterio del confronto la serie data è convergente.

37. Se $x=0$ la serie converge a zero. Sia $x>0$ allora definitivamente si avrà $0<\frac{x}{2^n}<1$ per cui la serie risulta a termini positivi definitivamente e inoltre:
$$\lim_{n\to\infty} 3^n \sin\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = +\infty$$
quindi la serie data è divergente.

Sia adesso $x<0$ allora
$$\sin\frac{x}{2^n} = \sin\frac{-|x|}{2^n} = -\sin\frac{|x|}{2^n}$$
da cui
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{|x|}{2^n}$$
e ripetendo lo stesso discorso fatto prima si ha che la serie diverge negativamente.

38. Se $\alpha=0$ la serie converge a zero.

Sia $\alpha\neq 0$ e studiamo l'assoluta convergenza:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\frac{n!}{|\alpha|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{per } |\alpha|\leq 1 \\ +\infty & \text{per } |\alpha|>1 \end{cases}$$
quindi la serie data è assolutamente convergente per $|\alpha|\leq 1$.

Se $\alpha>1$ la serie è a termini positivi e per quanto visto risulta divergente.

Sia adesso $\alpha<-1$; la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\frac{|\alpha|^{n^2}}{n!}$ il cui termine generale è una successione non convergente a zero e crescente quindi la serie data è oscillante.

39. Se $\alpha=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ allora la serie è identicamente uguale a zero. Se $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ allora $|\sin\alpha|<1$ e la serie è convergente in quanto serie geometrica di ragione $\sin\alpha$. Se $\alpha=(4k+1)\frac{\pi}{2}$ allora $\sin\alpha=1$ e la serie diverge positivamente. Se infine $\alpha=(4k+3)\frac{\pi}{2}$ allora $\sin\alpha=-1$ e la serie oscilla.

40. Poiché $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|\leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ e per la crescenza della funzione $\sinh x$ si ha che:
$$\frac{n}{e^{n^2}}\sinh\frac{(-1)^n}{n^2}\leq \sinh 1\frac{n}{e^{n^2}}, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$
Studiamo quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ che è a termini positivi e risulta:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e^{n^2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}} = 0$$
quindi per il criterio del confronto la serie data converge assolutamente.