Esercizio 35

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)$$

***

Soluzione
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)=\infty-\infty$$

La forma indeterminata può essere rimossa determinando un "fattore razionalizzante". In generale, se

$$f(x)=\sqrt[N]{p(x)}\pm\sqrt[N]{q(x)},$$

il fattore razionalizzante è:

$$r(x)=\sum_{k=1}^{N}(\mp 1)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}\,q(x)^{k-1}}$$

Per $f(x)=\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}$

$$\begin{aligned}r(x)&=\sum_{k=1}^{3}(+1)^{k+1}\sqrt[N]{(x-1)^{3-k}\,(2x)^{k-1}}\\&=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)\left[\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4}}\\&=-\frac{(+\infty)\cdot(1+0^+)}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\\&=-(+\infty)\\&=-\infty\end{aligned}$$

Esercizio 37

Calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4+1} \right)$$

***

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4+1} \right) = -\infty + \infty, \tag{1}$$

cioè il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. In questo caso l'indeterminazione si rimuove moltiplicando e dividendo per un fattore razionalizzante $r(x)$, che in generale si scrive:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{N} (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}, \text{ per } f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)} \tag{2}$$

Per poter applicare la (2), scriviamo nella (1) $x = -\sqrt[4]{x^4}$ (prendiamo la radice con il segno $-$ poichè nel calcolo del limite è $x \to -\infty$). Quindi:

$$f(x) = x + \sqrt[4]{x^4+1} = \sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[4]{x^4} \tag{3}$$

Con la $f(x)$ scritta come in (3) possiamo applicare la (2) per ottenere $r(x)$:

$$r(x) = \sqrt[4]{(x^4+1)^3} + \sqrt[4]{x^4(x^4+1)^2} + \sqrt[4]{x^8(x^4+1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \tag{4}$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)\, r(x)}{r(x)} \tag{5}$$

Sviluppiamo $f(x)\, r(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)\, r(x) &= \left(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[4]{x^4} \right) \left[\sqrt[4]{(x^4+1)^3} + \sqrt[4]{x^4(x^4+1)^2} + \sqrt[4]{x^8(x^4+1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \right] \\ &= \sqrt[4]{(x^4+1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{(x^4+1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}}}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+1-x^4}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{r(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

Ma

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \tag{7}$$

Esercizio 43

Determinare l'ordine dei seguenti infinitesimi (per $x \to 0$):

1. $f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ (per $x \to 0^+$)
3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ (per $x \to 0^+$)
4. $f(x) = \sin x - \tan x$

***

Soluzione

1. Assumiamo in tutti gli esercizi, la funzione $u(x) = x$ come infinitesimo di riferimento.
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x\to0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 1$$
Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$.
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to0^+} \sqrt[n]{\frac{x + \sqrt[n]{x}}{x^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{x\to0^+} \sqrt[n]{x^{1-\alpha n} + \sqrt[n]{x^{1-\alpha n^2}}} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$
Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{1}{n^2}$.
Alternativamente:
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} \tag{8}$$
Ma nella (8) x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, per cui
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{1/n^2}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2} \tag{9}$$
Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ e $\sqrt[n^2]{x}$ sono equivalenti, giacchè il limite (9) vale 1:
$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \sim \sqrt[n^2]{x} \tag{10}$$

3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt[n]{x^{2-\alpha n}} - \sqrt[n]{x^{3-\alpha n}} \right) \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{2}{n}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{2}{n}$.
Alternativamente:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} \tag{11}$$

Ma $x^{3/n}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{2/n}$, per cui

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/n}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{2}{n}$$

Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ e $\sqrt[n]{x^2}$ sono equivalenti, giacchè il limite vale 1:

$$\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3} \sim \sqrt[n]{x^2} \tag{12}$$

4. $f(x) = \sin x - \tan x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^\alpha \cos x} \\ &= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^{\alpha - 1}} \right) \\ &\in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 1 = 2 \iff \alpha = 3 \end{aligned}$$

Esercizio 107

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \\ &\overset{H}{=} -\lim_{x \to 1} \frac{\pi \sin \pi x}{2(x-1)} \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} \\ &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} -\frac{\pi^2}{x} \lim_{x \to 1} \cos \pi x \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 108

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right] &= \lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right] = -\frac{1}{2}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 110

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{\arcsin x - x}=\frac{0}{0}$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{\arcsin x - x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{2x}{1+x^4}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}\\
&=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}\cdot\frac{x\left(1+x^4\right)-x}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}=0
\end{aligned}$$

Esercizio 111

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\infty-\infty$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=\frac{0}{0}\\
&\overset{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{4\left[\frac{1-\cos 2x}{(2x^2)}\right]}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+\cos 2x}\\
&=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{1+2+2+1}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 115

Studiare il comportamento della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan x + \tan^2 x}\left(1 - e^{\pi - 2x}\right), \tag{13}$$

in un intorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$.

***

Soluzione
Determiniamo il limite sinistro e destro in tale punto.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - e^{\pi - 2x}}{\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-1/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2e^{\pi - 2x}}{-\frac{1}{2}\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{\cos^2 x}\right)} \\
&= -4 \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x} \cos^3 x \left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}}{\cos x + 2\sin x} \\
&= -4 \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x}\right)\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x \left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x \left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2} \qquad (15)\\
&= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x \left(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x + 1}{\cos^2 x}\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^3 x}{\left|\cos^3 x\right|}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-1)\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right)^{3/2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Per cui:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 2 \tag{16}$$

Passiamo al limite per $x \to \frac{\pi}{2}^-$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 \cdot \infty$$

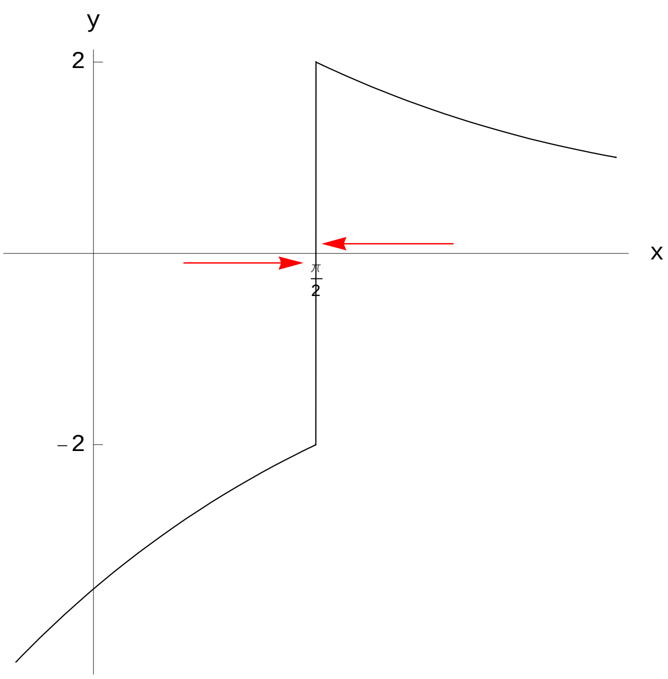
Eseguiamo il cambio di variabile: $y = \tan x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{y\to+\infty} \sqrt{1+y+y^2}\left(1-e^{\pi-2\arctan x}\right) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1-e^{\pi-2\arctan x}}{\left(1+y+y^2\right)^{-1/2}} = \frac{0}{0} \\
&\overset{H}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{2}{1+y^2}e^{\pi-2\arctan x}}{-\frac{1}{2}\left(1+y+y^2\right)^{-3/2}(1+2y)} \\
&= -4\left(\lim_{y\to+\infty} e^{\pi-2\arctan x}\right)\left[\lim_{y\to+\infty} \frac{\left(1+y+y^2\right)^{-3/2}}{\left(1+y^2\right)(1+2y)}\right] \\
&= -4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{17}$$

cioè:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2 \tag{18}$$

Si conclude che $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.



Esercizio 116

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Se applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

ci ritroviamo con il cacolo del limite:

$$\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x},$$

che ovviamente non esiste, per cui in tal caso la regola è inapplicabile. Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

poichè è $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Esercizio 117

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{|x|\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

***

Soluzione
Osserviamo che $\nexists \lim_{|x|\to +\infty} \sin x$, nè tantomeno è possibile applicare la regola di De L'Hospital, in quanto produrrebbe funzioni trigonometriche a numeratore e denominatore e come tali non regolari all'infinito.
Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{|x|\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{|x|\to +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

poichè è $\lim_{|x|\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Esercizio 118

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

***

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3+\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}x}=\frac{3+1}{1+1\cdot 0}=4,$$

Esercizio 119

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

***

Soluzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)\,(1+\sin x)}=\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$

Esercizio 120

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)},$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)}=\frac{0}{0}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)}\overset{H}{=}-\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+\pi-4\arctan x}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\cos(1-x)}\\
&=4\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\pi-4\arctan x}\right)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x^2)\cos(1-x)}\\
&=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=2
\end{aligned}$$

Esercizio 121

Determinare le singolarità della funzione:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, \tag{19}$$

***

Soluzione
La funzione è definita in $X=\mathbb{R}-\{0\}$.
Determiniamo il limite sinistro e destro in $x_0=0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{+\infty}-1}{e^{+\infty}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{+\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1 \qquad (20)\\
&\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1
\end{aligned}$$

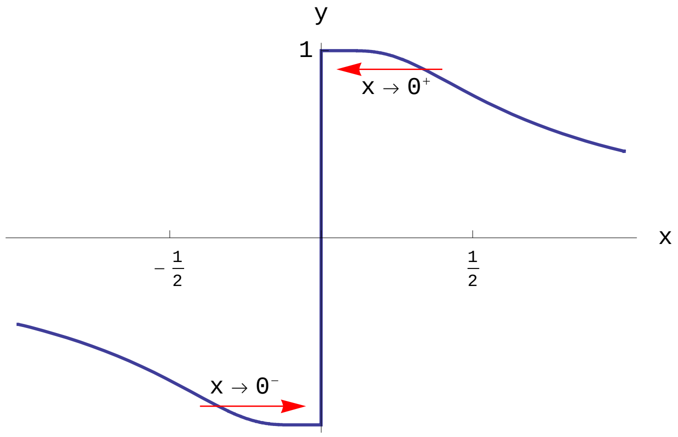
Si conclude che x_0 è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.

Esercizio 130

Studiare il comportamento per $x\to 0$ della funzione:

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \tag{21}$$

***



Soluzione
La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente dispari: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$. Inoltre è limitata su tutto $\mathbb{R}$: $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$.
Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, ..., \frac{1}{k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\pi}, \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{9\pi}, ..., \frac{2}{\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, ..., \frac{2}{3\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo che i punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $x'_k = \frac{2}{\pi+4k\pi}$, $x''_k = \frac{2}{3\pi+4k\pi}$ si addensano intorno a $x = 0$ (al crescere indefinito di k), per cui in ogni intorno di $x = 0$, la funzione assume i valori $0, -1, 1$. Pertanto non può essere verificata la definizione di limite, che in questo caso è:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{22}$$

In altri termini, $\nexists l$ tale che lo scarto $|f(x) - l|$ può essere reso arbitrariamente piccolo. Si conclude che la funzione (21) non è regolare in $x = 0$. Per quanto riguarda il diagramma cartesiano, osserviamo che in ogni intorno di $x = 0$, la funzione compie infinite oscillazioni, per cui non è possibile completare il grafico intorno a $x = 0$, come mostrato in fig.1 .
Osserviamo infine che all'infinito la funzione è infinitesima, avendosi:

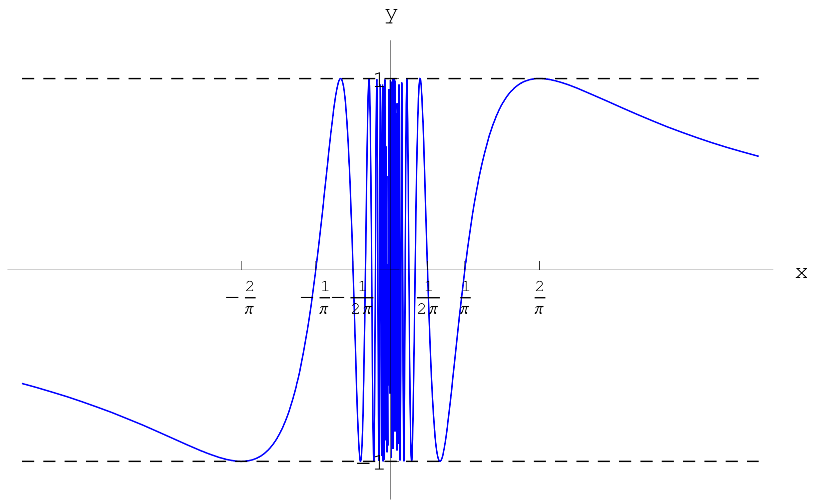


Figure 1: Grafico di $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^-} \sin t = 0^-$$

Esercizio 131

Studiare il comportamento per $x \longrightarrow 0$ della funzione:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \tag{23}$$

***

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente pari: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Inoltre :

$$\forall x \in X, \ \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \tag{24}$$

Dalla (24) applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \tag{25}$$

per cui la funzione è convergente in $x = 0$. Sempre per la (24) si ha che il diagramma cartesiano è contenuto nella regione del piano xy:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty, \ -x < y < x\}$$

Il diagramma cartesiano interseca infinite volte le rette $y = x$ e $y = -x$. Infatti:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$f(x) = -x \Longleftrightarrow x_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, ..., \frac{1}{k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Come nel caso di $\sin\frac{1}{x}$ anche qui la funzione compie infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$, con la differenza che le oscillazioni si smorzano per $x \to 0$.
Il diagramma è riportato in fig.2 .

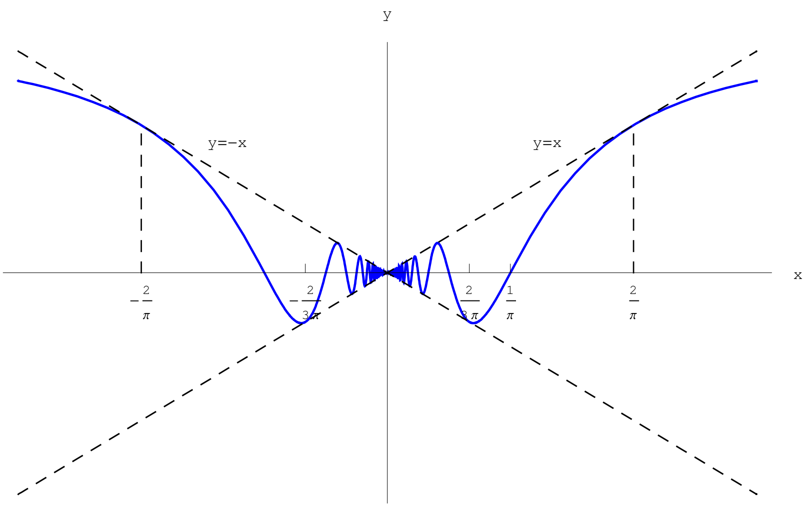


Figure 2: Diagramma cartesiano di $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Osserviamo infine che all'infinito la funzione converge a 1, avendosi:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1^-$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\sin t}{t} = 1^-$$

Esercizio 132

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \tag{26}$$

***

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}=\frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x} &\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1} && (27)\\ &=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cot^2 x}{1-x}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{1-\cos^2 x}\right]=0\cdot\infty && (28)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} && (29)\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} &=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\\ &=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x}{\tan x}\cos^2 x\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 133

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x} \qquad (30)$$

***

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}=\frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x} &\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1} && (31)\\ &=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cot^2 x}{1-x}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{1-\cos^2 x}\right]=0\cdot\infty && (32)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} && (33)\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\\ =-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x}{\tan x}\cos^2 x\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 133

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \tag{34}$$

***

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2e^x}{1+2e^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\\ =2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{e^{-x}+2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1\end{aligned} \tag{35}$$

Esercizio 134

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\arcsin x\cdot\ln x \tag{36}$$

***

Soluzione
Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+}\arcsin x\cdot\ln x=0\cdot\infty$$

Per applicare la regola di De L'Hospital dobbiamo ricondurre la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ a una delle due forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \arcsin x \cdot \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(\arcsin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\arcsin x)^{-2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} && (37) \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1-x^2}\frac{\arcsin x}{x} \cdot \arcsin x\right) && (38) \\
&= -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 && (39)
\end{aligned}$$

Esercizio 135

[file scaricato da http:/www.extrabyte.info]

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

***

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \infty - \infty$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa applicando la regola di De L'Hospital, dopo aver ricondotto la forma $\infty - \infty$ alla $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = && (40) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} \\
&= \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 136

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi - 2x|}$$

***

Soluzione
La differenza si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|} = \frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln\tan x}{\ln(\pi-2x)}\\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\pi-2x}}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\sin 2x} = \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x-\pi \Longrightarrow \sin 2x = \sin(t+\pi) = -\sin t$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\sin 2x} = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|} = -1$$

Esercizio 137

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$$

***

Soluzione
La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \infty - \infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty-\infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2\cot^2 x}{x^2}=\frac{0}{0}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cot^2 x+2x^2\cot x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x\cos x}{\sin^3 x}\\
&=\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^3 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^3 x}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}{3\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\frac{2}{3}$$

Esercizio 139

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

***

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\infty-\infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty-\infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^2\left(1-\cos x\right)}=\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x-2x\cos x+x^2\sin x}=\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{2\frac{1-\cos x}{x^2}+4\frac{\sin x}{x}+\cos x}\\
&=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 1+1}=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Si conclude che:

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{6}
$$

Esercizio 140

Calcolare il limite:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}
$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 0^0:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}=0^0,
$$

Scriviamo:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\ln|x|^{\sin x}}=e^{\lim_{x\to 0}\ln|x|^{\sin x}}
$$

Quindi calcoliamo a parte il limite:

$$
\lim_{x\to 0}\ln|x|^{\sin x}=\lim_{x\to 0}\sin x\ln|x|
$$

Distinguiamo i casi: $x\to 0^+$, $x\to 0^-$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\ln|x|^{\sin x}&=\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=0\cdot\infty\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\\
&\stackrel{H}{=}-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)\\
&=0^-
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} |x|^{\sin x} = e^{0^-} = 1^- \tag{41}$$

Per $x \to 0^-$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \ln |x|^{\sin x} &= \lim_{x\to 0^-} \sin x \ln(-x) = 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{\sin x}} \\
&\overset{H}{=} -\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{\cos x} \right) \\
&= 0^+
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^-} |x|^{\sin x} = e^{0^+} = 1^+ \tag{42}$$

Dalle (41)-(42) segue:

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin x} = 1$$

Esercizio 141

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = e^x$, per cui:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

Alternativamente:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \left(e^{e^x - 1} \right) = e^{+\infty} = +\infty$$

Esercizio 142

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi-2\arctan x}$$

***

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi-2\arctan x}=\frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi-2\arctan x}\stackrel{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{1+x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}$$

Esercizio 143

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)-ax}{\sin\left(bx\right)-bx}$$

***

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)-ax}{\sin\left(bx\right)-bx}=\frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)-ax}{\sin\left(bx\right)-bx}\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cos\left(ax\right)-a}{b\cos\left(bx\right)-b}$$
$$=\frac{0}{0}\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin\left(ax\right)}{b^2\sin\left(bx\right)}=\frac{a^3}{b^3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{\sin(bx)}{bx}}=\frac{a^3}{b^3}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)-ax}{\sin\left(bx\right)-bx}=\frac{a^3}{b^3}$$

Esercizio 144

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$$

***

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\frac{0}{0},$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Calcoliamo separamente i due limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

donde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=2$$

Esercizio 145

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

***

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$