Esercizio 645

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$

2. $I(x) = \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln x d \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int \left(\frac{x^2}{3} - x + 3 \right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2} x^2 + 3x + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right) + C \\ &= \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + \frac{x^2}{2} (1 - 2 \ln x) + 3x (\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) d \left(\frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{1}{2} \int x^2 d \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] &= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

per cui:

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx \\ &= x + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} \\ &= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (A,B) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Perciò:

$$J(x) = x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_1$$

Sostituendo nell'espressione di $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + C \\ &= \frac{x^2-1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 646

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x),\end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned}J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2}dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C\end{aligned}$$

2.

$$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \int \ln(\ln x)\, d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x\left[\ln(\ln x) - 1\right] + C,$$

Esercizio 646

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C \end{aligned}$$

2. $$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x)\, d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x \left[\ln(\ln x) - 1\right] + C,$$

Esercizio 647

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int x^2 \arctan 3x dx$
2. $I(x) = \int (\arcsin x)^2 dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$I(x) = \int \arctan 3x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arctan 3x - J(x)?$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^3}{1+9x^2}dx = \int \left[\frac{x}{9} - \frac{x}{9(1+9x^2)}\right]dx \\ &= \frac{1}{9}\int xdx - \frac{1}{9}\int \frac{xdx}{1+9x^2} \\ &= \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{18\cdot 9}\ln\left(1+9x^2\right) + C_1 \\ &= \frac{1}{18}\left[x^2 - \frac{1}{9}\ln\left(1+9x^2\right)\right] + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{x^3}{3}\arctan 3x - \frac{1}{18}\left[x^2 - \frac{1}{9}\ln\left(1+9x^2\right)\right] + C$$

2. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \arcsin x,$$

cosicchè:

$$x = \sin t, \; dx = \cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int t^2 \cos t dt$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int t^2 d(\sin t) = t^2 \sin t - 2\int t \sin t dt \\ \int t \sin t dt &= \int t d(-\cos t) = -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t + C_1 \\ &\Longrightarrow I(t) = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \arcsin x\left(x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}\right) - 2x + C$$

Esercizio 648

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int x \sin x \cos x dx$
2. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

***

Soluzione

1.
$$\begin{aligned} I(x) &= \int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x)\right] \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x - 2x \cos 2x) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:
$$I(x) = \int \arcsin x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + J(x),$$
essendo:
$$J(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
Eseguiamo la sostituzione trigonometrica:
$$x = \sin t,$$
cosicchè:
$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \; dx = \cos t dt$$
L'integrale diventa:
$$J(t) = \int \frac{dt}{\sin t},$$
ed è un integrale noto:
$$J(t) = \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + C_1$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} J(x) &= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C_1 \end{aligned}$$

$$I(x) = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

Esercizio 649

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$
2. $I(x) = \int x\tan^2 2x dx$

***

Soluzione

1. Osserviamo che:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C,$$
per cui:
$$\begin{aligned} I(x) &= \int \arcsin\sqrt{x} d\left(-2\sqrt{1-x}\right) \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x} d\left(\arcsin\sqrt{x}\right) \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

2. Osserviamo che:
$$\int \tan^2 2x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} - \int dx = \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

per cui:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int xd\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right) \\
&= x\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right) - \int\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}x\tan 2x - x^2 - \frac{1}{2}\int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
\int \tan 2x dx &= \frac{1}{2}\int \tan 2x d(2x) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{\sin 2x} \\
&= \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C_1
\end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln|\cos 2x| = \ln\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 2x\right)$$

Quindi l'integrale è:

$$I(x) = \frac{x}{2}\tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 650

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{\sin^2 x}{e^x}dx$$
$$\int e^{2x}\cos 3x dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \sin^2 x d\left(-e^{-x}\right) \qquad (1) \\
&= -e^{-x}\sin^2 x + J(x),
\end{aligned}$$

essendo:

$$J(x) = \int e^{-x} \sin 2x dx = \int e^{-x} d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \tag{2}$$
$$= -\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

Calcoliamo a parte:

$$J_1(x) = \int e^{-x} \cos 2x dx = \int e^{-x} d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + \frac{1}{2}J(x)$$

Sostituendo nella (2):

$$J(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}J(x)$$

per cui:

$$J(x) = -\frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \sin 2x) + C_1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -e^{-x}\sin^2 x - \frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \sin 2x) + C \\ &= -\frac{e^{-x}}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \sin 2x) + C \\ &= \frac{e^{-x}}{10}(\cos 2x - 2\sin 2x - 5) + C \end{aligned}$$

***

Anzichè procedere per parti, scriviamo:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x \tag{4}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x:

$$e^{2x}\cos 3x = \frac{d}{dx}\left(Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x\right) \tag{5}$$
$$= e^{2x}(2A + 3B)\cos 3x + (-3A + 2B)e^{2x}\sin 3x$$

La (5) è verificata se e solo se:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{2}{13},\ B = \frac{3}{13}$$

Quindi l'integrale è:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C \tag{6}$$

Esercizio 651

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx$

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

***

Soluzione

1. Anzichè integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = A e^{3x} \sin 4x + B e^{3x} \cos 4x + C \tag{7}$$

derivando:

$$\begin{aligned} & e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \\ & = e^{3x} (3A - 4B) \sin 4x + e^{3x} (4A + 3B) \cos 4x \\ & \iff \begin{cases} 3A - 4B = 2 \\ 4A + 3B = -5 \end{cases} \implies A = -\frac{14}{25}, \; B = -\frac{23}{25} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = \frac{e^{3x}}{25} (-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$$

2. Osserviamo che:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} e^{\tan x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan x e^{\tan x} d (\tan x)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int t e^t dt = \int t d \left(e^t \right) = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C,$$

cioè:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x d \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x \right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x \right) - \int \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \tan 2x - x^2 - \frac{1}{2} \int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}\int \tan 2x dx &= \frac{1}{2}\int \tan 2x d\left(2x\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\cos 2x\right)}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right| + C_1\end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln\left|\cos 2x\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 2x\right)$$

Quindi l'integrale è:

$$I\left(x\right) = \frac{x}{2}\tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 652

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx$
2. $\int e^x \sin x dx$

***

Soluzione

1.

$$\begin{aligned}I\left(x\right) &= \int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx \\ &= \int \ln\left(1+e^x\right) d\left(e^x\right) \\ &= e^x \ln\left(1+e^x\right) - J\left(x\right),\end{aligned}$$

essendo:

$$J\left(x\right) = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}d\left(e^x\right)$$

Poniamo $t = e^x$:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t - \ln|t+1| \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$J(x) = e^x - \ln(1 + e^x) + C$$

E finalmente:

$$I(x) = (1 + e^x)\ln(1 + e^x) - e^x + C$$

2. Anziché integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^x \sin x dx = Ae^x \sin x + Be^x \cos x + C$$

derivando:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= e^x (A - B)\sin x + e^x (A + B)\cos x \\ &\iff \begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \implies A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

Esercizio 653

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Dimostrare:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C \end{aligned} \tag{8}$$

***

Soluzione

Per il primo integrale, ci serviamo della formula di duplicazione del seno $\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, scrivendo $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Procedendo per decomposizione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}dx \\
&= -\int \frac{d\left(\cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \\
&= -\ln\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin \frac{x}{2}\right| + C \\
&= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

Per ricondurlo alla prima delle (8) ci serviamo delle formule di bisezione:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \cot x,$$

ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

Il secondo può essere ricondotto al primo scrivendo:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

cosicché:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left|\frac{1}{\cos x} - \tan x\right| + C$$

Per ricondurlo alla seconda delle (8) osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \tan x} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \tan x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan x}{\frac{1}{\cos x} + \tan x} \\
&= \frac{1}{\cos x} + \tan x,
\end{aligned}$$

da cui:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$

Esercizio 654

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$
2. $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x - \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right) \\ &= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}d\left(e^x\right)$$

Poniamo $e^x = t$, quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t+1}dt &= \int \frac{t+1-2}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{2}{t+1}\right)dt \\ &= t - 2\ln|t+1| + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = e^x - 2\ln\left(e^x+1\right) + C$$

Esercizio 655

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}}$

2. $\int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} = -\left(1+\sqrt{x+1}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}} &= -\int \left(1+\sqrt{x+1}\right) dx \\ &= -\left(\int dx + \int \sqrt{x+1}dx\right) \\ &= -x - \frac{2}{3}(x+1)^3 \sqrt{x+1} + C\end{aligned}$$

2. Abbiamo:

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{(\sqrt[3]{x}-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt[3]{x}-2} = \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$$

Quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}dx &= \int \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right) dx \\ &= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 4x + C\end{aligned}$$

Esercizio 656

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

2. $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$$

   Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx&=\int\left(\sqrt{x}-1\right)dx\\&=\int\sqrt{x}dx-\int dx\\&=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx&=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}\right)dx\\&=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}\\&=\tan x-2\ln\left|\cos x\right|+C\end{aligned}$$

Esercizio 657

Calcolare i seguenti integrali

1. $\displaystyle\int\cos x\left(\tan x+e^{\sin x}\right)dx$
2. $\displaystyle\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\sin x}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int\cos x\left(\tan x+e^{\sin x}\right)dx&=\int\cos x\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\cos x e^{\sin x}dx\\&=-\cos x+\int e^{\sin x}d\left(\sin x\right)\\&=-\cos x+e^{\sin x}+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{1+\sin x} = \frac{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{1+\sin x} = \sin x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \sin x dx - \int \sin^2 x dx \\ &= -\cos x - \int \sin^2 x dx\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C_1 \\ &= \frac{1}{4}\left(2x - \sin 2x\right) + C_1\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1+\sin x} dx = -\cos x - \frac{1}{4}\left(2x - \sin 2x\right)$$

Esercizio 659

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x^3+a^3}{x+a} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}, \quad a \neq b$

***

Soluzione

1. Abbiamo:

$$\frac{x^3+a^3}{x+a} = \frac{(x+a)\left(x^2-ax+a^2\right)}{x+a} = x^2 - ax + a^2$$

Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-ax+a^2\right) dx &= \int x^2 dx - a\int x dx + a^2 \int x dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + a^2 x + C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché razionalizzando:

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}dx &= \frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}dx-\int\sqrt{x+b}dx\right)\\ &= \frac{2}{3\left(a-b\right)}\left[\sqrt{\left(x+a\right)^3}-\sqrt{\left(x+b\right)^3}\right]+C\end{aligned}$$

Esercizio 660

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int\frac{x+(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}&\int\frac{x+\left(\arcsin x\right)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\left(\arcsin x\right)^3\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}d\left(1-x^2\right)+\int\left(\arcsin x\right)^3d\left(\arcsin x\right)\\ &=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\left(\arcsin x\right)^4+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx &= \int\sqrt{1+x}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}\\ &=\frac{2}{3}\left(1+x\right)^{3/2}-2\sqrt{1+x}+C\\ &=2\sqrt{1+x}\left(x-2\right)+C\end{aligned}$$

Esercizio 661

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$
2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, poiché:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 1+\cos x$$

Quindi:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{x},$$

cosicché:

$$x = t^2,\ dx = 2tdt$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} &= 2\int \frac{1+e^t}{t} tdt \\ &= 2\left(\int dt + \int e^t dt\right) \\ &= 2\left(t+e^t\right) + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

Esercizio 665

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

2. $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \ln x,$$

cosicché:

$$dt = \frac{dx}{x}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C,$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{e^x - 1},$$

cosicché:

$$x = \ln\left(t^2+1\right),\ dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int t \cdot \frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} \\ &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) \\ &= 2(t - \arctan t) + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \sqrt{e^x-1}dx = 2\left(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Esercizio 666

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

***

Soluzione

1. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x d(\sin x) \\ &= \int \sqrt{\sin x} \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) \end{aligned}$$

Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sin x$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \sqrt{t} dt - \int t^{5/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{7} t^{7/2} + C \\ &= \frac{2}{3} t \sqrt{t} - \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \frac{2}{21} \sin x \sqrt{\sin x} \left(7 - 3 \sin^2 x\right) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \tan t,$$

cosicché:

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \; dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \cos t dt = \sin t + C$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Esercizio 667

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{2x-1},$$

cosicché:

$$x = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right),\ dx = tdt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+1)\,t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\arctan t + C \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} = 2\arctan\sqrt{2x-1} + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$x = \sin^2 t,$$

cosicché:

$$dx = 2\sin t\cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = 2\int \sin^2 t dt,$$

chè è un integrale noto:

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t) + C_1$$

ripristinando la variabile x:

$$t = \arcsin\sqrt{x},\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x} \Longrightarrow \sin t\cos t = \sqrt{x(1-x)}$$

Quindi:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} + C$$

Esercizio 669

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
3. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

***

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = 1 + e^x,$$

cosicché:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln (e^x + 1) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{x},$$

cosicché:

$$dx = 2tdt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2 \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{1+t-1}{1+t} dt \\ &= 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) \\ &= 2 (\ln |t| - \ln |t+1|) + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| + C$$

3.
$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = e^x,$$

cosicché:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x + C$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan e^x + C$$

Esercizio 673

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{2x^2-x+2}$

2. $\int \frac{dx}{2+4x-x^2}$

***

Soluzione

1. Scriviamo:

$$2x^2 - x + 2 = 2(x+k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l,$$

da cui:

$$\begin{cases} 4k = -1 \\ 2k^2 + l = 2 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{4},\ l = 2 - k^2 = \frac{15}{8}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}}$$
$$= \frac{8}{15}\int \frac{dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}$$

Poniamo:

$$t = \frac{4x-1}{\sqrt{15}} \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{15}}{4}dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \frac{2\sqrt{15}}{15}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15}\arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{2\sqrt{15}}{15}\arctan\frac{4x-1}{\sqrt{15}} + C$$

2. Scriviamo:

$$2+4x-x^2 = -(x+k)^2 + l = -x^2-2kx-k^2+l,$$

da cui:

$$\begin{cases} -2k = 4 \\ -k^2+l = 2 \end{cases} \Longrightarrow k=-2,\, l=6$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \int \frac{dx}{6-(x-2)^2}$$

Poniamo:

$$t = x-2 \Longrightarrow dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{dt}{6-t^2}$$

L'integrale $\int \frac{dt}{6-t^2}$ è un integrale noto. Infatti:

$$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t+a}{t-a}\right| + C,$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{6}}{t-\sqrt{6}}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{6}}{x-2-\sqrt{6}}\right| + C$$

Esercizio 674

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{2x^2-x+2}$
2. $\int \frac{dx}{2+4x-x^2}$

***

Soluzione

1. Scriviamo:
$$2x^2 - x + 2 = 2(x+k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l,$$
da cui:
$$\begin{cases} 4k = -1 \\ 2k^2 + l = 2 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{4},\ l = 2 - k^2 = \frac{15}{8}$$
Quindi:
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} = \frac{8}{15} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1}$$
Poniamo:
$$t = \frac{4x-1}{\sqrt{15}} \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{15}}{4} dt$$
L'integrale diventa:
$$F(t) = \frac{2\sqrt{15}}{15} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan t + C$$
Ripristinando la variabile x:
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{15}} + C$$
2. Scriviamo:
$$2 + 4x - x^2 = -(x+k)^2 + l = -x^2 - 2kx - k^2 + l,$$
da cui:
$$\begin{cases} -2k = 4 \\ -k^2 + l = 2 \end{cases} \Longrightarrow k = -2,\ l = 6$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \int \frac{dx}{6-(x-2)^2}$$

Poniamo:

$$t = x-2 \Longrightarrow dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{dt}{6-t^2}$$

L'integrale $\int \frac{dt}{6-t^2}$ è un integrale noto. Infatti:

$$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{t+a}{t-a}\right| + C,$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{t+\sqrt{6}}{t-\sqrt{6}}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{x-2+\sqrt{6}}{x-2-\sqrt{6}}\right| + C$$

Esercizio 797

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2-9}$$
$$\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$$

***

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9}$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2-9 = (x-3)(x+3),$$

quindi:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-3)(x+3)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \\ &= \frac{Ax + 3A + Bx - 3B}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x + 3(A-B)}{(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x + 3(A-B) = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - 3B = 1 \end{cases},$$

nelle incognite (A, B). Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

2. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 6},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+6)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6} \\ &= \frac{Ax + 6A + Bx + B}{(x+1)(x+6)} \\ &= \frac{(A+B)x + (6A+B)}{(x+1)(x+6)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)\,x+(6A+B)=1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+B=1 \end{cases},$$

nelle incognite (A,B). Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=\frac{1}{5}, B=-\frac{1}{5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{(x+1)\,(x+6)}dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+6} \\ &=\frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{5}\ln|x+6| \\ &=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right|+C \end{aligned}$$

Esercizio 798

Calcolare gli integrali:

$$\begin{aligned} &\int\frac{xdx}{x^2-3x-4} \\ &\int\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx \end{aligned}$$

***

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x-4}$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2-3x-4=(x+1)\,(x-4)\,,$$

quindi:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\,(x-4)}$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x-4)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}\\ &= \frac{Ax-4A+Bx+B}{(x+1)(x-4)}\\ &= \frac{(A+B)x+(-4A+B)}{(x+1)(x-4)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x+(-4A+B)=1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=1\\ -4A+B=0\end{cases},$$

nelle incognite (A,B). Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=\frac{1}{5},B=\frac{4}{5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int\frac{xdx}{(x+1)(x-4)} &= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-4}\\ &= \frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{4}{5}\ln|x-4|+C\\ &= \frac{1}{5}\ln\left[|x+1|\cdot(x-4)^4\right]+C\end{aligned}$$

2. In questo caso il grado del numeratore è pari a quello del denominatore. Procediamo in questo modo:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx &= \int\frac{x^2-2x-8+5x+4}{x^2-2x-8}dx\\ &= \int dx+\int\frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx\end{aligned}$$

Calcoliamo $\int\frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx$ per decomposizione in frazioni parziali. Poniamo:

$$f(x)=\frac{5x+4}{x^2-2x-8},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} &= \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2} \\ &= \frac{Ax+2A+Bx-4B}{(x-4)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{(x-4)(x+2)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x+(2A-4B)=5x+4$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ A-2B=2 \end{cases},$$

nelle incognite (A,B). Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=4, B=1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}&\int \frac{5x+4}{(x-4)(x+2)}dx = 4\int \frac{dx}{x-4}+\int \frac{dx}{x+2} \\ &= 4\ln|x-4|+\ln|x+2|+C_1\end{aligned}$$

Si conclude che l'integrale proposto vale:

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx = x+4\ln|x-4|+\ln|x+2|+C$$

Esercizio 799

Una grandezza fisica x (resa adimensionale) è legata al tempo t dall'equazione:

$$\int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx = \int \kappa dt, \tag{9}$$

essendo κ una costante positiva con le dimensioni dell'inverso di un tempo, ed a un parametro reale positivo. Esplicitare la dipendenza funzionale $x(t)$.

***

Soluzione
Siccome κ è una costante, la (9) implica:

$$\kappa t = F(x),$$

essendo $F(x)$ una primitiva di

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{a^4 - x^4} = \frac{x^2}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{x^2}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \end{aligned}$$

$f(x)$ è una funzione razionale propria, per cui possiamo procedere per decomposizione in frazioni parziali. Precisamente, in frazioni parziali distinte:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} + \frac{Cx + D}{a^2 + x^2} \\ &= \frac{A(a + x)(a^2 + x^2) + B(a - x)(a^2 + x^2) + (Cx + D)(a^2 - x^2)}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{(A - B - C)x^2 + (aA + aB - D)x^2 + (a^2A - a^2B + a^2C)x + a^3A + a^3B + a^2D}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)}, \end{aligned}$$

cioè:

$$(A - B - C)x^2 + (aA + aB - D)x^2 + \left(a^2A - a^2B + a^2C\right)x + a^3A + a^3B + a^2D = x^2 \quad (10)$$

Dalla (10) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A - B - C + 0 = 0 \\ aA + aB + 0 - D = 1 \\ A - B + C + 0 = 0 \\ aA + aB + 0 + D = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

nelle incognite (A, B, C, D).
Le matrici incompleta e incompleta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di M:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2a & 2a & 0 \end{vmatrix} \\ &= 8a\end{aligned}$$

Quindi $r(M) = 4$. Inoltre, $r(N) = 4$, per cui $r(M) = r(N) = 4$. Ciò implica che (11) è un sistema di Cramer con caratteristica $p = 4$.

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

essendo

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Quindi:

$$A = \frac{1}{4a} \tag{12}$$

L'incognita B:

$$B = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

essendo:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Qundi:

$$B = \frac{1}{4a} \tag{13}$$

Le rimanenti incognite C, D possono essere calcolate direttamente, cioè senza ricorrere ai determinanti. Infatti dalla seconda e terza equazione di (11):

$$\begin{aligned} C &= A - B = 0 \\ D &= a(A + B) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$A = \frac{1}{4a}, B = \frac{1}{4a}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} \\ &= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a^2}\underbrace{\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{=\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$t(x) = \frac{1}{4a\kappa}\left[\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - 2\arctan\frac{x}{a}\right] + C \tag{14}$$

La dipendenza funzionale della grandezza x in funzione del tempo è data dall'inversa della funzione $t(x)$ espressa dalla (14).

Esercizio 800

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x-1}{x(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C) - 2A}{x(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B+C)x^2 + (A+2B-C) - 2A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ A+2B+C=-3 \\ 2A+0+0=1 \end{cases},$$

nelle incognite (A,B,C). Si tratta di un sistema di Cramer. Anzichè risolvere con il metodo dei determinanti, è più semplice risolvere direttamente. Infatti dalla terza equazione otteniamo:

$$A=\frac{1}{2},$$

che sostituita nella prima e seconda:

$$\begin{cases} B+C=\frac{1}{2} \\ 2B-C=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della prima equazione per -2:

$$\begin{cases} -2B-2C=-1 \\ 2B-C=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$C=\frac{3}{2}$$

Quindi:

$$B=\frac{1}{2}-C=-1$$

Riassumendo, la soluzione del sistema è:

$$A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{3}{2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C \\
&= \ln\frac{|x|^{1/2}\cdot|x+2|^{3/2}}{|x-1|}+C \\
&= \ln\frac{\sqrt{x\,(x+2)^3}}{|x-1|}+C
\end{aligned}$$

Esercizio 801

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{xdx}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx$$

***

Soluzione

1. L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Precisamente in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-2)^2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A_1 x - 2A_1 + A_2}{x(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

   Quindi:

$$A_1 x - 2A_1 + A_2 = x$$

   Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ -2A_1 + A_2 = 0 \end{cases},$$

   la cui soluzione è immediata:

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2$$

   Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x-2)^2} &= \int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C\end{aligned}$$

2. Qui abbiamo una funzione razionale impropria, per cui eseguiamo la divisione tra i due polinomi, ottenendo:

$$\frac{x^4}{(1-x)^3} = -x - 3 + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x},$$

quindi:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^3} + 4\int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2} - 6\int \frac{d(1-x)}{1-x} \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \underbrace{\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{4}{1-x}}_{=\frac{1-8(1-x)}{2(1-x)^2}=\frac{8x-7}{2(1-x)^2}} - 6\ln|1-x| + C \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{8x-7}{(1-x)^2} - x^2 - 3x - 6\ln|1-x|\right] + C
\end{aligned}$$

Esercizio 802

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{x^3+x}$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$$

***

Soluzione

1. L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x^2+Cx+A=1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A=1,\ B=-1,\ C=0$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+x} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C\end{aligned}$$

2. Anche qui procediamo per decomposizioni in frazioni parziali:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2+x+3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3} \\ &= \frac{\left(Ax+B\right)\left(x^2+3\right)+\left(x^2+1\right)\left(Cx+D\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)} \\ &= \frac{\left(A+C\right)x^3+\left(B+D\right)x^2+\left(3A+C\right)x+3B+D}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}\end{aligned}$$

Deve essere:

$$\left(A+C\right)x^3+\left(B+D\right)x^2+\left(3A+C\right)x+3B+D = x^3+x^2+x+3,$$

da cui il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A+0+C+0=1 \\ 0+B+0+D=1 \\ 3A+0+C+0=1 \\ 0+3B+0+D=3 \end{cases},$$

che è un sistema di Cramer, come si può vedere da un calcolo diretto del rango della matrice incompleta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\Delta = \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \\ \Longrightarrow r\left(M\right) = 4\end{aligned}$$

Evidentemente:

$$r\left(N\right) = 4,$$

essendo N la matrice completa:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0,$$

poichè Δ_1 ha due righe uguali. Possiamo determinare le rimanenti incognite per sostituzione anziché con il metodo dei determinanti

$$A = 0 \Longrightarrow C = 1$$

Inoltre:

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ 3B + D = 3, \end{cases}$$

da cui

$$B = 1, D = 0$$

Riassumendo:

$$A = 0, C = 1, B = 1, D = 0,$$

donde:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2+1)(x^2+3)} dx &= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{xdx}{x^2+3} \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + 3\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 803

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$$

***

Soluzione
Qui abbiamo una funzione razione impropria, per cui eseguiamo la divisione tra polinomi, ottenendo:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = \frac{1}{x} + x + \frac{1 - x}{x^2 - 2x + 3},$$

onde l'integrale si esprime:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \ln |x| + \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx,$$

resta quindi da calcolare l'integrale a secondo membro. Ques'ultimo si calcola facilmente, poiché:

$$x - 1 = \frac{1}{2} d \left(x^2 - 2x + 3 \right)$$

Quindi:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 2x + 3 \right| + C_1$$

Si conclude che l'integrale proposto è dato da:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} + C$$

Esercizio 808

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - e^x}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$e^x = t$$

Differenziando:

$$e^x dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dt}{t \left(t^2 - t \right)}$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{1}{t^2 (t - 1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2(t-1)} &= \frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\frac{B}{t-1}\\ &= \frac{At(t-1)+A_2(t-1)+Bt^2}{t^2(t-1)}\\ &= \frac{(A_1+B)t^2+(-A_1+A_2)t-A_2}{t^2(t-1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A_1+B)t^2+(-A_1+A_2)t-A_2=1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1+0+B=0\\ A_1-A_2+0=0\\ 0+A_2+0=1\end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A_1=-1,\ A_2=-1, B=1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{t(t^2-t)} &= -\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t-1}\\ &= -\ln|t|+\frac{1}{t}+\ln|t-1|+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int\frac{dx}{e^{2x}-e^x}=-x+e^{-x}+\ln|e^x-1|+C$$

Esercizio 809

Calcolare l'integrale:

$$F(x)=\int\frac{\sin x dx}{\cos x(1+\cos^2 x)}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$t=\cos x$$

Differenziando:

$$dt=-\sin x dx$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = -\int \frac{dt}{t(t^2+1)}$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{1}{t(t^2+1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t(t^2+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \\
&= \frac{A(t^2+1) + Bt^2 + Ct}{t(t^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)t^2 + Ct + A}{t(t^2+1)}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)t^2 + Ct + A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
F(t) &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{tdt}{t^2+1} \\
&= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C \\
&= \ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|} + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x(1+\cos^2 x)} = \ln\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{|\cos x|} + C$$

Esercizio 811

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{(2+\tan^2 x)\,dx}{\cos^2 x\,(1+\tan^3 x)}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$\tan x = t$$

Differenziando:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{2+t^2}{1+t^3}dt$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{t^2+2}{t^3+1} = \frac{t^2+2}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}\frac{t^2+2}{(t+1)(t^2-t+1)} &= \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \\ &= \frac{At^2-At+A+Bt^2+(B+C)t+C}{(t+1)(t^2-t+1)} \\ &= \frac{(A+B)t^2+(-A+B+C)t+A+C}{(t+1)(t^2-t+1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)t^2+(-A+B+C)t+A+C = t^2+2$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B+0=1 \\ A-B-C=0 \\ A+0+C=2 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Infatti:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\Delta = \det M = -3 \neq 0 \Longrightarrow r(M) = 3$$

D'altro canto:

$$r(N) = 3$$

Quindi $r(M) = r(N) = 3$.
La soluzione è:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} \\ &= \ln|t+1| + F_1(t), \end{aligned} \tag{15}$$

essendo

$$F_1(t) \stackrel{def}{=} \int \frac{dt}{t^2 - t + 1}$$

Quest'ultimo appartiene alla classe degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado, e come tale si risolve nel seguente modo:

$$\begin{aligned} t^2 - t + 1 &= (t+k)^2 + l \\ &= t^2 + 2kt + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -1 \\ l + k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

da ciò segue:

$$\begin{aligned} t^2 - t + 1 &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right], \end{aligned}$$

quindi:

$$F_1(t) = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C_1$$

Finalmente possiamo scrivere l'integrale (15):

$$F(t) = \ln|t+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{(2+\tan^2 x)\,dx}{\cos^2 x\,(1+\tan^3 x)} = \ln|\tan x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Esercizio 812

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

***

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$= \frac{(A_1+B)x^3+(-A_1+A_2-2B+C)x^2+(A_1+B-2C)x-A_1+A_2+C}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Quindi:

$$(A_1+B)x^3+(-A_1+A_2-2B+C)x^2+(A_1+B-2C)x-A_1+A_2+C$$
$$= x^2-2x+3$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1+0+B+0=0 \\ -A_1+A_2-2B+C=1 \\ A_1+0+B-2C=-2 \\ -A_1+A_2+0+C=3 \end{cases}$$

Scriviamo le due matrici, incompleta e completa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$r(M) = r(N) = 4$$

Abbiamo cioè un sistema di Cramer. Risolvendolo otteniamo:

$$A_1 = -1, A_2 = 1, B = 1, C = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2 (x^2+1)} dx &= -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln\sqrt{x^2+1} + \arctan x + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} + \arctan x - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Esercizio 813

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = (x-1)^2 (x+1)^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} \cdot \left[(A_1 + B) x^3 + (A_1 + A_2 - B_1 + B_2) x^2 \right. \\ &\left. + (-A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2) x - A_1 + A_2 + B_1 + B_2\right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A_1 + B)\, x^3 + (A_1 + A_2 - B_1 + B_2)\, x^2 + (-A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2)\, x - A_1 + A_2 + B_1 + B_2$$
$$= 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B_1 + 0 = 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = 0 \\ -A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2 = 0 \\ -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 3 \end{cases}$$

Scriviamo le due matrici, incompleta e completa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$r(M) = r(N) = 4$$

Abbiamo cioè un sistema di Cramer. Risolvendolo otteniamo:

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{4}, B_1 = \frac{1}{4}, B_2 = \frac{1}{4}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} \right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 814

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

***

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\\ &= \frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)}\\ &= \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x-A=1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0\\ -A=1\end{cases}$$

La cui soluzione è immediata

$$A=-1, B=1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x-1)} &= -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}\\ &= -\ln|x|-\ln|x-1|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C\end{aligned}$$

Esercizio 815

Calcolare l'integrale:

$$F(x)=\int\frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}dx$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Innanzitutto osserviamo che:

$$\left(x^2+x\right)\left(x^3+1\right)=x(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)$$

Quindi la riduzione in frazioni parziali si scrive:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{x\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{\left(x+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}\\ &= \frac{1}{x\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)}[A\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)\\ &+ B_1x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+B_2x\left(x^2-x+1\right)+x\left(Cx+D\right)\left(x+1\right)^2]\\ &= \frac{1}{x\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)}[\left(A+B_1+C\right)x^4+\left(A+B_2+2C+D\right)x^3\\ &+\left(-B_2+C+2D\right)x^2+\left(A+B_1+B_2+D\right)x+A]\end{aligned}$$

Deve essere:

$$\begin{aligned}&\left(A+B_1+C\right)x^4+\left(A+B_2+2C+D\right)x^3\\ &+\left(-B_2+C+2D\right)x^2+\left(A+B_1+B_2+D\right)x+A] = x^4+8x^3-x^2+2x+1\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\left\{\begin{array}{c} A+B_1+0+C+0=1\\ A+0+B_2+2C+D=8\\ 0+0-B_2+C+2D=-1\\ A+B_1+B_2+0+D=2\\ A+0+0+0+0=1\end{array}\right. \tag{16}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $A=1$, per cui il sistema (16) equivale al seguente:

$$\left\{\begin{array}{c} B_1+0+C+0=0\\ 0+B_2+2C+D=7\\ 0-B_2+C+2D=-1\\ B_1+B_2+0+D=1\end{array}\right., \tag{17}$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Risolvendolo con l'omonima regola, si ottiene: $B_1=-2, B_2=3, C=2, D=0$.
Riassumendo, la soluzione di (16) è:

$$A=1, B_1=-2, B_2=3, C=2, D=0$$

Perciò:

$$\begin{aligned}F\left(x\right) &= \int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}+2\int\frac{xdx}{x^2-x+1}\\ &= \ln\left|x\right|+2\ln\left|x+1\right|+2F_1\left(x\right),\end{aligned}$$

essendo:

$$F_1\left(x\right)=\int\frac{xdx}{x^2-x+1}, \tag{18}$$

che si calcola con il metodo noto dell'integrazioni di funzioni contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente:

$$x = a\frac{d}{dx}\left(x^2 - x + 1\right) + b,$$

essendo a, b coefficienti indeterminati:

$$x = 2ax - a + b \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2 - x + 1\right)}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. A tale scopo scriviamo:

$$x^2 - x + 1 = (x + k)^2 + l \Longrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases},$$

per cui: $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$, donde:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo omesso la costante di integrazione.

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Finalmente otteniamo l'integrale proposto:

$$F(x) = \ln\frac{|x|\left(x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 816

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} &= \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}\\ &= \frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}[(A+C)\,x^3\\ &+\left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)x^2+\left(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\right)x\\ +B+D=1]\end{aligned}$$

Deve essere:

$$\begin{aligned}&(A+C)\,x^3+\left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)x^2+\left(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\right)x\\ &+B+D=1\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+0+C+0+1\\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0\\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0\\ 0+B+0+D=1\end{cases} \tag{19}$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Risolvendolo con l'omonima regola, si ottiene

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}},B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},D=\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right) \tag{20}$$

I due integrali a secondo membro si calcolano il metodo di integrazione delle funzioni contenenti un trinomio di secondo grado, ottenendo:

$$\begin{aligned}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx &= \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\\ \int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)-\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\end{aligned}$$

Quindi:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]$$

Esercizio 817

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= 5 \int \frac{x^3 + \frac{2}{5}}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \\
&= 5 \int \frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 5x^2 - 4x + \frac{2}{5}}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \\
&= 5 \left(\int dx + \frac{1}{5} \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \right) \\
&= 5x + F_1(x),
\end{aligned}$$

essendo:

$$F_1(x) = \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx,$$

che si calcola per riduzione in frazioni semplici. In ogni caso, questo procedimento è troppo laborioso per cui è conveniente eseguire l la divisione tra polinomi dell'integrando di $F(x)$:

$$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{161}{6(x-4)} + 5,$$

donde:

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + 5x + C$$

Metodo di Ostrogradskij

Si applica ad integrali del tipo:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \tag{21}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, con $q(x)$ di grado superiore a quello di $p(x)$ (quindi l'integrando è una funzione razionle propria).
Inoltre il denominatore è del tipo:

$$q(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right)^{\nu}$$

In tal caso si dimostra che:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{22}$$

Nella (22) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati di grado sono inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Sviluppiamo un esempio preso dal Demidovic (Esercizi e problemi di Analisi Matematica), confrontando il metodo di Ostrogradskij con il metodo per decomposizione in frazioni semplici.

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} \tag{23}$$

Metodo di Ostrogradskij

Qui è

$$q(x) = \left(x^3-1\right)^2 \tag{24}$$

Quindi:

$$q'(x) = 3x^2\left(x^3-1\right)$$

Pertanto:

$$q_1(x) = x^3-1$$

ciò implica:

$$q_2(x) = \frac{(x^3-1)^2}{x^3-1} = x^3-1$$

q_1 e q_2 sono di terzo grado, onde X e Y sono entrambi di secondo grado, con coefficienti indeterminati.
La (22) si scrive:

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

Derivando ambo i membri:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} &= \frac{\left(2Ax+B\right)\left(x^3-1\right)-3x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\left(x^3-1\right)^2} \\
&+ \frac{Dx+Ex+F}{x^3-1} \\
&= \frac{1}{\left(x^3-1\right)} \cdot \left[Dx^5+\left(E-3A\right)x^4+\left(F+2A-3B\right)x^3\right. \\
&+ \left(D-3C\right)x^2+\left(-E-2A\right)x+\left(-F-B\right)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
1 = & Dx^5+\left(E-3A\right)x^4+\left(F+2A-3B\right)x^3 \\
& + \left(D-3C\right)x^2+\left(-E-2A\right)x+\left(-F-B\right)
\end{aligned}
$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$
\begin{cases}
D=0 \\
-3A+E=0 \\
2A-2B+F=0 \\
-3C+D=0 \\
-2A-E=0 \\
-B-F=1
\end{cases}
\tag{25}
$$

Ricaviamo:

$$
D=0, C=0
$$

Quindi il sistema (25) equivale a

$$
\begin{cases}
3A-E=0 \\
2A-2B+F=0 \\
2A-E=0 \\
B+F=-1
\end{cases}
\tag{26}
$$

La prima e la terza equazione implicano:

$$
A=E=0,
$$

onde otteniamo il sistema equivalente:

$$
\begin{cases}
2B-F=0 \\
B+F=0
\end{cases},
$$

da cui:

$$
B=-\frac{1}{3}, F=-\frac{2}{3}
$$

Raccogliendo la soluzione, si ottiene:

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1} \tag{27}$$

L'integrale $\int \frac{dx}{x^3-1}$ si calcola per decomposizione in frazioni semplici.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \\
&= \frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-x)}{(x-1)(x^2+x+1)},
\end{aligned}$$

cioè:

$$(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)=1$$

Per il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a+b+0=0 \\ a-b+c=0 \\ a+0-c=1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=-\frac{2}{3}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx \tag{28}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. Si tratta di un integrale contenente un trinomio di secondo grado, per cui applichiamo il noto procedimento di calcolo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}
\end{aligned} \tag{29}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
x^2+x+1 &= (x+k)^2+l = x^2+2kx+k^2+l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ l=\frac{3}{4} \end{cases} \\
&\Longrightarrow x^2+x+1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right],
\end{aligned}$$

quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

che sostituito in (29):

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

L'integrale (28):

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

E finalmente l'integrale proposto (27):

$$\int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{x}{3\left(x^2-1\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Metodo della decomposizione in frazioni semplici

Siccome $\left(x^3-1\right)^2 = (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2$, la decomposizione in frazioni semplici è:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\
&= \frac{1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}[(A_1+B_1)\,x^5 + (A_1+A_2-B_1+C_1)\,x^4 + \\
&+ (A_1+2A_2+B_2-C_1)\,x^3 + (-A_1+3A_2-B_1-2B_2+C_2)\,x + \\
&+ (-A_1+2A_2+B_1+B_2-C_1-2C_2) + (-A_1+A_2+C_1+C_2)],
\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
1 = {} & (A_1+B_1)\,x^5 + (A_1+A_2-B_1+C_1)\,x^4 + \\
& + (A_1+2A_2+B_2-C_1)\,x^3 + (-A_1+3A_2-B_1-2B_2+C_2)\,x + \\
& + (-A_1+2A_2+B_1+B_2-C_1-2C_2) + (-A_1+A_2+C_1+C_2)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema di equazioni lineari di sei equazioni in sei incognite:

$$\left\{\begin{array}{c}
A_1+0+B_1+0+0+0=0 \\
A_1+A_2-B_1+C_1+0+0=0 \\
A_1+2A_2+0-C_1+B_2+C_2=0 \\
-A_1+3A_2-B_1+0-2B_2+C_2=0 \\
-A_1+2A_2+B_1-C_1+B_2-2C_2=0 \\
-A_1+A_2+0+C_1+0+C_2=0
\end{array}\right.,$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A_1 = -\frac{2}{9}, A_2 = \frac{1}{9}, B_1 = \frac{2}{9}, C_1 = \frac{1}{3}, B_2 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{1}{3},$$

donde:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} &= -\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2} + \frac{1}{9}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \\ &= -\frac{2}{9}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{9\left(x-1\right)} + \frac{1}{9}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx\end{aligned}$$

È evidetente che il metodo di Ostrogradskij è, in questo caso, più vantaggioso, poiché con il metodo della decomposizione in frazioni semplici, innanzitutto occorre risolvere un sistema di sei equazioni in sei incognite, dopodiché escono altri due integrali con trinomi di secondo grado, mentre con Ostrogradskij abbiamo un solo integrale.

Esercizio 823

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F\left(x\right) = \int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2} \tag{30}$$

***

Soluzione
Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}dx = \frac{X\left(x\right)}{q_1\left(x\right)} + \int \frac{Y\left(x\right)}{q_2\left(x\right)}dx \tag{31}$$

Nella (31) $q_1\left(x\right)$ è il massimo comune denominatore di $q\left(x\right)$ e $q'\left(x\right)$, mentre:

$$q_2\left(x\right) = \frac{q\left(x\right)}{q_1\left(x\right)}$$

Le funzioni $X\left(x\right)$, $Y\left(x\right)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1\left(x\right)$ e $q_2\left(x\right)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}q\left(x\right) &= \left(x^4-1\right)^2 \\ q'\left(x\right) &= 8x^3\left(x^4-1\right)\end{aligned}$$

Quindi:

$$q_1(x) = x^4 - 1 \Longrightarrow X(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$q_2(x) = x^4 - 1 \Longrightarrow Y(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$$

La (31) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4-1} + \int \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4-1} \tag{32}$$

Derivando primo e secondo membro della (32):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^4-1)^2} &= \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4-1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{(x^4-1)^2} + \\
&+ \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4-1} \\
&= \frac{p_1(x)}{(x^4-1)^2} + \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4-1} \\
&= \frac{p_1(x) + Ex^7 + Fx^6 + Gx^5 + Hx^4 - Ex^3 - Fx^2 - Gx - H}{(x^4-1)^2},
\end{aligned} \tag{33}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
&p_1(x) \stackrel{def}{=} \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\left(x^4 - 1\right) - 4x^3\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \\
&= 3Ax^6 + 2Bx^5 + Cx^4 - 3Ax^2 - 2Bx - C - 4Ax^6 - 4Bx^5 - 4Cx^4 - 4Dx^3 \\
&= -Ax^6 - 2Bx^5 - 3Cx^4 - 4Dx^3 - 3Ax^2 - 2Bx - C,
\end{aligned}$$

che sostituita in (33) fornisce:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^4-1)^2} &= Ex^7 + (-A + F)x^6 + (-2B + G)x^5 + \\
&+ (-3C + H)x^4(-4D - E)x^3(-3A - F+)x^2 + (-2B - G)x + (-C - H),
\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}
1 &= Ex^7 + (-A + F)x^6 + (-2B + G)x^5 + \\
&+ (-3C + H)x^4(-4D - E)x^3(-3A - F+)x^2 + (-2B - G)x + (-C - H)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
E = 0 \\
A = F \\
G = 2B \\
H = 3C \\
E = -4D \\
3A = -F \\
2B = -G \\
C + H = -1
\end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$A = F = E = D = B = G = 0$$
$$\begin{cases} H = 3C \\ C + H = -1 \end{cases} \Longrightarrow C = -\frac{1}{4}, H = -\frac{3}{4}$$

Sostituendo nella (32) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(x^4-1)} + \int \frac{dx}{x^4-1} \tag{34}$$

Dobbiamo perciò calcolare

$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\
&= \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Cioè:

$$1 = (a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)$$

Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti a, b, c, d devono soddisfare il sistema lineare:

$$\begin{cases} a+b+c+0 = 0 \\ a-b+0+d = 0 \\ a+b-c+0 = 0 \\ a-b+0-d = 1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$$

Quindi (omettiamo la costante di integrazione)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x,
\end{aligned}$$

che sostituita nella (34) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{3}{8}\arctan x - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{4(x^4-1)} + C$$

Esercizio 824

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \tag{35}$$

***

Soluzione
Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{36}$$

Nella (36) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$q(x) = \left(x^2-1\right)^2$$
$$q'(x) = 2x\left(x^2-1\right)$$

Quindi:

$$q_1(x) = x^2 - 1 \Longrightarrow X(x) = Ax + B$$
$$q_2(x) = x^2 - 1 \Longrightarrow Y(x) = Cx + D$$

La (36) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-1}dx \tag{37}$$

Derivando primo e secondo membro della (37):

$$\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{A\left(x^2-1\right)-2x\left(Ax+B\right)}{\left(x^2-1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-1} \tag{38}$$
$$= \frac{Ax^2-A-2Ax^2-2Bx+\left(Cx+D\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{Cx^3+\left(-A+D\right)x^2+\left(-2B-C\right)x+\left(-A-D\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

cioè:

$$1 = Cx^3+\left(-A+D\right)x^2+\left(-2B-C\right)x+\left(-A-D\right)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} C=0 \\ A=D \\ 2B=-C \\ A+D=-1 \end{cases}$$

Sostituendo nella (37) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x}{2\left(x^2-1\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1} \tag{39}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale fondamentale, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

che sostituita nella (39) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x}{2\left(x^2-1\right)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C \tag{40}$$

Esercizio 824

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F\left(x\right) = \int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} \tag{41}$$

***

Soluzione
Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}dx = \frac{X\left(x\right)}{q_1\left(x\right)}+\int\frac{Y\left(x\right)}{q_2\left(x\right)}dx \tag{42}$$

Nella (42) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$\begin{gathered} q(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 \\ q'(x) = 2x\left(x^2 - 1\right) \end{gathered}$$

Quindi:

$$\begin{gathered} q_1(x) = x^2 - 1 \Longrightarrow X(x) = Ax + B \\ q_2(x) = x^2 - 1 \Longrightarrow Y(x) = Cx + D \end{gathered}$$

La (36) si scrive:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 1} dx \tag{43}$$

Derivando primo e secondo membro della (43):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)^2} &= \frac{A\left(x^2 - 1\right) - 2x\left(Ax + B\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 1} \\ &= \frac{Ax^2 - A - 2Ax^2 - 2Bx + \left(Cx + D\right)\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} \\ &= \frac{Cx^3 + \left(-A + D\right)x^2 + \left(-2B - C\right)x + \left(-A - D\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} \end{aligned} \tag{44}$$

cioè:

$$1 = Cx^3 + \left(-A + D\right)x^2 + \left(-2B - C\right)x + \left(-A - D\right)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} C = 0 \\ A = D \\ 2B = -C \\ A + D = -1 \end{cases}$$

Sostituendo nella (37) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 - 1\right)^2} = -\frac{x}{2\left(x^2 - 1\right)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1} \tag{45}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale fondamentale, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

che sostituita nella (45) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 - 1\right)^2} = -\frac{x}{2\left(x^2 - 1\right)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \tag{46}$$

Esercizio 825

Calcolare il seguente integrale utilizzando separatamente il metodo di Ostrogradskij e il metodo della riduzione in frazioni semplici (coefficienti indeterminati).

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)^2} \tag{47}$$

***

Soluzione

Riduzione in frazioni parziali

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{A(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{(A + B_1)x^2 + (2A + B_1 + B_2)x + A}{x(x+1)^2},
\end{aligned}$$

cioè:

$$(A + B_1)x^2 + (2A + B_1 + B_2)x + A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 2A + B_1 + B_2 = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Tale sistema si risolve facilmente per sostituzione, ottenendo:

$$A = 1, B_1 = -1, B_2 = -1$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2} \\
&= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\
&= \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

Confrontando i due metodi, vediamo che in questo caso specifico il metodo di Ostrogradskij è più laborioso, per cui è preferibile applicare quest'ultimo solo nei casi di un $q\left(x\right)$ "più complicato". Ad esempio, per $q\left(x\right) = \left(x^3-1\right)^4$, la riduzione in frazioni semplici conduce ad un sistema di 12 equazioni lineari in 12 incognite.

Esercizio 826

Calcolare l'integrale

$$
F\left(x\right) = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^2} \tag{48}
$$

***

Soluzione

Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij:

$$
\int \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}dx = \frac{X\left(x\right)}{q_1\left(x\right)} + \int \frac{Y\left(x\right)}{q_2\left(x\right)}dx \tag{49}
$$

Nella (55) $q_1\left(x\right)$ è il massimo comune denominatore di $q\left(x\right)$ e $q'\left(x\right)$, mentre:

$$
q_2\left(x\right) = \frac{q\left(x\right)}{q_1\left(x\right)}
$$

Le funzioni $X\left(x\right)$, $Y\left(x\right)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1\left(x\right)$ e $q_2\left(x\right)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$
\begin{aligned}
q\left(x\right) &= \left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^2 \\
q'\left(x\right) &= 2\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)^2 + 4x\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
q_1\left(x\right) &= \left(x+1\right)\left(x^2+1\right) \Longrightarrow X\left(x\right) = Ax^2+Bx+C \\
q_2\left(x\right) &= \left(x+1\right)\left(x^2+1\right) \Longrightarrow Y\left(x\right) = Dx^2+Ex+F
\end{aligned}
$$

La (55) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{(x+1)(x^2+1)} dx \tag{50}$$

Derivando primo e secondo membro della (56):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} &= \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} [(2Ax+B)\left(x^3+x^2+x+1\right) - \\ &- \left(Ax^2+Bx+C\right)\left(3x^2+2x+1\right)] + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+x^2+x+1} \\ &= \frac{p_1(x) + (Dx^2+Ex+F)(x^3+x^2+x+1)}{(x^3+x^2+x+1)^2},\end{aligned}$$

essendo:

$$p_1(x) = -Ax^4 - 2Bx^3 + (A-B-3C)x^2 + (2A-2C)x + B - C$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &Dx^5 + (-A+D+E)x^4 + (-2B+D+E+F)x^3 \\ &+ (A-B-3C+D+E+F)x^2 + \\ + (2A-2C+E+F)x + (B-C+F) = 1 \end{aligned}$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite A, B, C:

$$\begin{cases} 0+0+0+D+0+0=0 \\ -A+0+0+D+E+0=0 \\ 0-2B+0+D+E+F=0 \\ A-B-3C+D+E+F=0 \\ 2A+0-2C+0+E+F=0 \\ 0+B-C+0+0+F=1 \end{cases} \tag{51}$$

Risolvendo tale sistema (di Cramer):

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = 0, E = -\frac{1}{4}, F = \frac{3}{4} \tag{52}$$

Sostituendo nella (56) la soluzione (58), si ha:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{x-x^2}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{4} \int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx \tag{53}$$

Ci resta da calcolare l'integrale a secondo membro $\int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx$; procediamo per riduzione in frazioni parziali:

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}\\ &= \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+a+c}{(x+1)(x^2+1)},\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} a+b+0=0 \\ 0+b+c=1 \\ a+0+c=-3\end{cases},$$

che risuslta essere un sistema di Cramer, con suluzione:

$$a=-2, b=2, c=1,$$

cosicché:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)}dx = -2\ln|x+1| + \ln\left(x^2+1\right) + \arctan x,$$

che sostituito nella (59) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{x-x^2}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C \quad (54)$$

Esercizio 827

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^4} \quad (55)$$

***

Soluzione

Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij. Scriviamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \quad (56)$$

Nella (62) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$q(x) = \left(x^2+1\right)^4$$
$$q'(x) = 8x\left(x^2+1\right)^3$$

Quindi:

$$q_1(x) = \left(x^2+1\right)^3 \Longrightarrow X(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$
$$q_2(x) = x^2+1 \Longrightarrow Y(x) = Gx + H$$

La (62) si scrive:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{\left(x^2+1\right)^3} + \int \frac{Gx+F}{x^2+1}dx \tag{57}$$

Derivando primo e secondo membro della (63):

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^6}[\left(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E\right)\left(x^2+1\right)^3 - \\ - 6x\left(x^2+1\right)^2\left(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F\right)] + \frac{Gx+F}{x^2+1}$$

Sviluppando i prodotti e ordinando i vari termini, otteniamo

$$1 = Gx^7 + (-A+H)x^6 + (-2B+3G)x^5 + \\ + (5A-3C+3H)x^4 + (4B-4D+3G)x^3 \\ + (3C-5E+3H)x^2 + (2D-6F+G)x + E + H$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di otto equazioni lineari nelle otto incognite (A, B, C, D, E, F, G, H):

$$\begin{cases} G = 0 \\ A = H \\ 2B = 3G \\ 5A - 3C + 3H = 0 \\ 4B - 4D + 3G = 0 \\ 3C - 5E + 3H = 0 \\ 2D - 6F + G = 0 \\ E + H = 1 \end{cases} \tag{58}$$

Dalla prima, dalla seconda e dalla terza equazione si ricava:

$$G = 0, B = 0, A = H \tag{59}$$

Quindi il sistema (64) si riduce a:

$$
\left\{\begin{array}{c}
8A-3C=0 \\
D=0 \\
3C-5E+3A=0 \\
F=0 \\
E+A=1
\end{array}\right. \tag{60}
$$

perciò $D=F=0$:

$$
\left\{\begin{array}{c}
8A-3C+0=0 \\
3A+3C-5E=0 \\
A+0+E=1
\end{array}\right. ,
$$

che si risolve facilmente con la regola di Cramer: $A=\frac{5}{16}, C=\frac{5}{6}, E=\frac{11}{16}$. Riassumendo, la soluzione del sistema lineare (64) è:

$$
A=\frac{5}{16}, B=0, C=\frac{5}{6}, D=0, E=\frac{11}{16}, F=0, G=0, H=\frac{5}{16} \tag{61}
$$

Sostituendo la soluzione trovata in (63):

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4} &= \frac{\frac{5}{16}x^5+\frac{5}{6}x^3+\frac{11}{16}x}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{16}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{=\arctan x} \\
&= \frac{x\left(15x^3+40x+33\right)+15\left(x^2+1\right)^3\arctan x}{48\left(x^2+1\right)^3}+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 828

Calcolare l'integrale

$$
F(x)=\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx \tag{62}
$$

***

Soluzione

Eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore:

$$
\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{8(2x+1)}-\frac{7}{8(2x-1)}+\frac{1}{4}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx &= \int \frac{dx}{x}-\frac{9}{8}\int \frac{dx}{2x+1}-\frac{7}{8}\int \frac{dx}{2x-1}+\frac{1}{4}\int dx \\
&= \ln|x|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|+\frac{x}{4}+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 828

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx \tag{63}$$

***

Soluzione
Eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore:

$$\frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{8(2x+1)} - \frac{7}{8(2x-1)} + \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx &= \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{8} \int \frac{dx}{2x+1} - \frac{7}{8} \int \frac{dx}{2x-1} + \frac{1}{4} \int dx \\
&= \ln|x| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| + \frac{x}{4} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 830

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} dx \tag{64}$$

***

Soluzione
Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{(x-3)^2 (x+1)^2} [A_1 (x-3)(x+1)^2 + A_2 (x+1)^2 \\
&+ B_1 (x-3)^2 (x+1) + B_2 (x-3)^2] \\
&= \frac{1}{(x-3)^2 (x+1)^2} [(A_1 + B_1) x^3 + (-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2) x^2 \\
&+ (-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2) x + (-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2)]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$5x^2+6x+9=(A_1+B_1)\,x^3+(-A_1+A_2-5B_1+B_2)\,x^2+ \\ +(-5A_1+2A_2+3B_1-6B_2)\,x+(-3A_1+A_2+9B_1+9B_2)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1+0+B_1+0=0 \\ -A_1+A_2-5B_1+B_2=5 \\ -5A_1+2A_2+3B_1-6B_2=6 \\ -3A_1+A_2+9B_1+9B_2=9 \end{cases} \tag{65}$$

Il sistema (71) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1=0, A_2=\frac{9}{2}, B_1=0, B_2=\frac{1}{2}$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2\,(x+1)^2}=\frac{9}{2\,(x-3)^2}+\frac{1}{2\,(x+1)^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2\,(x+1)^2}dx &= \frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{9}{2}\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C \\ &= \frac{5x+3}{-x^2+2x+3}+C\end{aligned}$$

Esercizio 831

Calcolare l'integrale

$$F(x)=\int\frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx \tag{66}$$

***

Soluzione

Osserviamo che $(x^2-3x-10)^2=(x-5)^2\,(x+2)^2$, quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-8x+7}{(x-5)^2(x+2)^2} &= \frac{A_1}{x-5}+\frac{A_2}{(x-5)^2}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}\\
&= \frac{1}{(x-5)^2(x+2)}[A_1(x-5)(x+2)^2+A_2(x+2)^2\\
&+B_1(x-5)^2(x+2)+B_2(x-5)^2]\\
&= \frac{1}{(x-5)^2(x+2)}[(A_1+B_1)x^3+(-A_1+A_2-8B_1+B_2)x^2\\
&+(-16A_1+4A_2+5B_1-10B_2)x+(-20A_1+4A_2+50B_1+25B_2)]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
x^2-8x+7 &= (A_1+B_1)x^3+(-A_1+A_2-8B_1+B_2)x^2+\\
&+(-16A_1+4A_2+5B_1-10B_2)x+(-20A_1+4A_2+50B_1+25B_2)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
A_1+0+B_1+0=0\\
-A_1+A_2-8B_1+B_2=1\\
-16A_1+4A_2+5B_1-10B_2=-8\\
-20A_1+4A_2+50B_1+25B_2=7
\end{cases} \tag{67}$$

Il sistema (73) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1=\frac{30}{343}, A_2=-\frac{8}{49}, B_1=-\frac{30}{343}, B_2=\frac{27}{49}$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}=\frac{30}{343}\frac{1}{x-5}-\frac{8}{49}\frac{1}{(x-5)^2}-\frac{30}{343}\frac{1}{x+2}+\frac{25}{49}\frac{1}{(x+2)^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx &= \frac{30}{343}\int\frac{dx}{x-5}-\frac{8}{49}\int\frac{dx}{(x-5)^2}\\
&-\frac{30}{343}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{25}{49}\int\frac{dx}{(x-2)^2}\\
&= \frac{30}{343}\ln|x-5|+\frac{8}{49}\frac{1}{x-5}-\frac{30}{343}\ln|x+2|-\frac{25}{49}\frac{1}{x-2}+C\\
&= \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+\frac{151-19x}{49(x^2-3x-10)}+C
\end{aligned}$$

Esercizio 832

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^3} dx \tag{68}$$

***

Soluzione

Osserviamo che $\left(x^2-3x+2\right)^3 = (x-1)^3(x-2)^3$, quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{(x-1)^3(x-2)^3} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^3} \\
&= \frac{1}{(x-5)^2(x+2)} [(A_1+B_1)x^5 + (-7A_1+A_2-8B_1+B_2)x^4 \\
&+ (-25A_1+9A_2-3A_3-38B_1+18B_2-6B_3)x^2 \\
&+ (16A_1-7A_2+3A_3+28B_1-20B_2+12B_3)x \\
&+ (-4A_1+2A_2-A_3-8B_1+8B_2-8B_3)]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
2x-3 &= (A_1+B_1)x^5 + (-7A_1+A_2-8B_1+B_2)x^4 \\
&+ (-25A_1+9A_2-3A_3-38B_1+18B_2-6B_3)x^2 \\
&+ (16A_1-7A_2+3A_3+28B_1-20B_2+12B_3)x \\
&+ (-4A_1+2A_2-A_3-8B_1+8B_2-8B_3)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
A_1+0+0+B_1+0+0=0 \\
-7A_1+A_2+0-8B_1+B_2+0=0 \\
19A_1-5A_2+A_3+25B_1-7B_2+B_3=0 \\
-25A_1+9A_2-3A_3-38B_1+18B_2-6B_3=0 \\
16A_1-7A_2+3A_3+28B_1-20B_2+12B_3=2 \\
-4A_1+2A_2-A_3-8B_1+8B_2-8B_3=-3
\end{cases} \tag{69}$$

Il sistema (75) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1=0, A_2=-1, A_3=1, B_1=0, B_2=1, B_3=1$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{2x-3}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{(x-1)^3(x-2)^3}dx &= \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{(x-2)^3} \\ &= -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x-2)^2} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 833

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{xdx}{x^2-x-2} \tag{70}$$

***

Soluzione
Siccome l'integrale contiene un trinomio di secondo grado, applichiamo il procedimento standard per questi tipi di integrali. Precisamente, "forziamo" il numeratore dell'integrando ad assumere la forma del differenziale del denominatore in modo da far risultare un logaritmo come risultato dell'integrazione:

$$\begin{aligned}&xdx = ad\left(x^2-x-2\right) + bdx \\ &\iff x = a(2x-1) + b \Longrightarrow a = b = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

cosicché l'integrale proposto può scriversi:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x^2-x-2} &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x-2)}{x^2-x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-2\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-2}\end{aligned} \tag{71}$$

Calcoliamo a parte l'integrale $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$. A tale scopo cerchiamo di far comparire un quadrato perfetto a denominatore:

$$\begin{aligned}x^2-x-2 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow k = -\frac{1}{2},\ l = -\frac{9}{4} \\ &\Longrightarrow x^2-x-2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 - 1\right]\end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{4}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 - 1} \tag{72}$$

Poniamo:

$$t = \frac{2x - 1}{3}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale noto:

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right|$$

onde:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right|,$$

che sostituita nella (77):

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x^2 - x - 2} &= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - x - 2 \right| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| (x - 2)(x + 1) \right| + \frac{1}{6} \ln |x + 2| - \frac{1}{6} \ln |x + 1| \\
&= \frac{1}{2} \ln |x - 2| + \frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{1}{6} \ln |x + 2| - \frac{1}{6} \ln |x + 1| \\
&= \frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{2}{3} \ln |x - 2|
\end{aligned}$$

Esercizio 835

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^5 dx}{(x^3 - 1)(x^3 - 8)} \tag{73}$$

***

Soluzione

Riduciamo in fattori il denominatore dell'integrando:

$$\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 - 8\right) = (x - 1)(x - 2)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 4\right),$$

quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{(x^3-1)(x^3-8)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+4}\\ &= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A(x-2)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)\\ &+ B(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)\\ &+ (Cx+D)(x-1)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\\ &+ (Ex+F)(x-1)(x-2)\left(x^2+x+1\right)]\\ &= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A(x-2)\left(x^4+3x^3+7x^2+6x+4\right)\\ &+ B(x-1)\left(x^4+3x^3+7x^2+6x+4\right)\\ &+ (Cx+D)\left(x^4-x^3-8x+8\right)\\ &+ (Ex+F)\left(x^4-2x^3-x+2\right)]\\ &= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A\left(x^5+x^4+x^3-8x^2-8x-8\right)\\ &+ B\left(x^5+2x^4+4x^3-x^2-2x-4\right)\\ &+ Cx^5+(D-C)x^4-Dx^3-8Cx^2+(8C-8D)x+8D\\ &+ Ex^5+(F-2E)x^4+(-2F)x^3+(-E)x^2+(2E-F)x+2F]\end{aligned}$$

Cioè:
$x^5=(A+B+C+E)x^5+(A+2B-C+F+D-2E)x^4+$
$+(A+4B-2F-D)x^3+(-8A-B-8C-E)x^2+$
$+(8C-2B-8A-F-8D+2E)x+(2F-4B-8A+8D)$
Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B+C+0+E+0=1\\ A+2B-C+D-2E+F=0\\ A+4B+0-D+0-2F=0\\ 8A+B+8C+0+E=0\\ 8A+2B-8C+8D-2E+F=0\\ 8A+4B+0-8D+0-2F=0\end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=-\frac{1}{21},B=\frac{8}{21},C=-\frac{2}{21},D=-\frac{1}{21},E=\frac{16}{21},F=\frac{16}{21}$$

Pertanto:

$$\frac{x^5}{(x^3-1)(x^3-8)}=-\frac{1}{21}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{21}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{21}\frac{x+16}{x^2+x+1}+\frac{16}{21}\frac{x+1}{x^2+2x+4}$$

Integrando:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5 dx}{\left(x^3-1\right)\left(x^3-8\right)} &= -\frac{1}{21}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{8}{21}\int \frac{dx}{x-2} \\
&- \frac{1}{21}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{16}{21}\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx \\
&= -\frac{1}{21}\ln|x-1|+\frac{8}{21}\ln|x-2| \\
&- \frac{1}{21}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{16}{21}\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx
\end{aligned}
$$

I due integrali a secondo membro si calcolano con il procedimento standard degli integrali contenenti un trinomio semplice di secondo grado:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx &= \ln\left(x^2+x+1\right) \\
\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'equazione precedente

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5 dx}{\left(x^3-1\right)\left(x^3-8\right)} &= -\frac{1}{21}\ln|x-1|+\frac{8}{21}\ln|x-2|-\frac{1}{21}\ln\left(x^2+x+1\right) \\
&+ \frac{8}{21}\ln\left(x^2+2x+4\right)+C \\
&= \frac{8}{21}\ln\left|x^3-8\right|-\frac{1}{21}\ln\left|x^3-1\right|+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 836

Calcolare i seguenti integrali

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= \int \frac{dx}{x\left(x^n+1\right)} \\
G_n(x) &= \int \frac{dx}{x\left(x^n+1\right)^2}
\end{aligned}
\tag{74}
$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$
1=\left(x^n+1\right)-1, \tag{75}
$$

per cui:

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= \int \frac{(x^n+1)-1}{x(x^n+1)}dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{n}\int \frac{d(x^n+1)}{x^n+1} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{n}\ln|x^n+1| + C
\end{aligned} \tag{76}
$$

Per l'integrale $G_n(x)$ utilizziamo la (81), ottenendo:

$$
\begin{aligned}
G_n(x) &= \int \frac{(x^n+1)-1}{x(x^n+1)^2}dx \\
&= F_n(x) - \int \frac{x^{n-1}}{(x^n+1)^2}dx
\end{aligned} \tag{77}
$$

Tenendo conto della (82) e osservando che $\int \frac{x^{n-1}}{(x^n+1)^2}dx = -\frac{1}{n(1+x^n)}$, si ottiene:

$$
G_n(x) = \ln|x| - \frac{1}{n}\ln|x^n+1| + \frac{1}{n(1+x^n)} + C \tag{78}
$$

Esercizio 837

Calcolare l'integrale

$$
F(x) = \int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}} \tag{79}
$$

***

Soluzione
Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij. Scriviamo la formula di riduzione:

$$
\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{80}
$$

Nella (86) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$
q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}
$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$q(x) = (x-1)^{10}$$
$$q'(x) = 10(x-1)^9$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&q_1(x) = (x-1)^9 \Longrightarrow X(x) = Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 \\
&\qquad + Gx^2 + Hx + I \\
&q_2(x) = x-1 \Longrightarrow Y(x) = L
\end{aligned}$$

La (86) si scrive:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)^{10}} = &\frac{Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + I}{(x-1)^9} \\
&+ \int \frac{L}{x-1} dx
\end{aligned} \tag{81}$$

Derivando primo e secondo membro della (87):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^{10}} = &-\frac{1}{(x-1)^{10}}[Ax^8 + (8A+2B)x^7 + (7B+3C)x^6 + \\
&+ (6C+4D)x^5 + (5D+5E)x^4 + (6F+4E)x^3 \\
&+ (3F+7G)x^2 + (2G+8H) \\
&+ (H+9I)] + \frac{L}{x-1}
\end{aligned}$$

Eseguendo le dovute semplificazioni:

$$\begin{aligned}
1 = &Lx^9 + (-A-9L)x^8 + (-8A-2B+36L)x^7 \\
&+ (-7B-3C-84L)x^6 + (-6C-4D+126L)x^5 \\
&+ (-5D-5E-126L)x^4 + (-4E-6F+84L)x^3 \\
&+ (-3F-7G-36L)x^2 + (-2G-H+9L)x \\
&- (H+9I+L)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
L = 0 \\
A + 9L = 0 \\
8A + 2B - 36L = 0 \\
7B + 3C - 84L = 0 \\
6C + 4D - 126L = 0 \\
5D + 5E + 126L = 0 \\
4E + 6F - 84L = 0 \\
-3F - 7G - 36L = 1 \\
2G + 8H - 9L = 0 \\
H + 9I + L = 0
\end{cases} \tag{82}$$

La soluzione del sistema (88) è:

$$A=0, B=0, C=0, F=0, G=-\frac{1}{7}, H=\frac{1}{28}, L=0, D=0, E=0, I=-\frac{1}{252}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
X(x) &= -\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{28}x-\frac{1}{252} \\
&= -\frac{36x^2-9x+1}{252} \\
Y(x) &= 0
\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}} = -\frac{36x^2-9x+1}{252}+C$$

$F(x) = 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$ +const

Esercizio 822

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$1-x=t^2$$

Ciò implica:

$$dx=-2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= -2\int\frac{dt}{1+t^2} \\
&= -2\arctan t+\text{const}
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = -2\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)+\text{const}$$

Esercizio 838

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt{3x-2}} \tag{83}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto è del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_m}{q_m}}\right] dx, \tag{84}$$

essendo $\mathcal{R}$ una funzione razionale, e $p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_m, q_m \in \mathbb{N}$. L'integrale (91) si risolve con il cambio di variabile:

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n},$$

dove n è il m.c.m di $q_1, q_2, ..., q_n$. Più precisamente, l'integrale viene ricondotto all'integrale di una funzione razionale.
Nel caso specifico di (90) il cambio di variabile è:

$$t = \sqrt[4]{3x-2},$$

onde:

$$x = \frac{t^4+2}{3}, \quad dx = \frac{4}{3}t^3 dt$$

Perciò:

$$F(t) = \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{1-t}dt$$

L'integrando è una funzione razionale impropria (o *irregolare*), per cui eseguiamo la divisione tra i polinomi:

$$\frac{t^2}{1-t} = -t - \frac{1}{t-1} - 1$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{1-t}dt &= -\int tdt - \int \frac{dt}{t-1} - \int dt = \\ &= -\frac{1}{2}t^2 - \ln|t-1| - t + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{3x-2}-\sqrt[4]{3x-2}-\ln\left(\left|\sqrt[4]{3x-2}\right|-1\right)\right]+C\\
&= -\frac{2}{3}\left[\sqrt{3x-2}+2\sqrt[4]{3x-2}+2\ln\left(\left|\sqrt[4]{3x-2}\right|-1\right)\right]+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 839

Calcolare l'integrale

$$
F(x)=\int x^2\sqrt{x^2+3}dx \tag{85}
$$

***

Soluzione
Moltiplicando la funzione integranda per $\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$ otteniamo:

$$
F(x)=\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx \tag{86}
$$

Tale integrale è del tipo:

$$
\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{87}
$$

essendo $p_n(x)$ un polinomio di grado $n\geq 2$ (per $n=0,1$ l'integrale si calcola con il procedimento standard applicabile agli integrali contenenti un trinomio di secondo grado). Sussiste la seguente formula di riduzione:

$$
\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{88}
$$

dove $X_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ a coefficienti indeterminati, e α è un ulteriore coefficiente indeterminato. Tali coefficienti si determinano derivando primo e secondo membro (95) e applicando il principio di identità dei polinomi.
Nel caso di (93):

$$
\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx = \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+3}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} \tag{89}
$$

Derivando primo e secondo membro:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}} &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+3}+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+3}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left(3C+\alpha+xD+9Ax^2+4Ax^4+3Bx^3+2Cx^2+6Bx\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left[4Ax^4+3Bx^3+(9A+2C)x^2+(6B+D)x+(3C+\alpha)\right]
\end{aligned}
$$

Per il principi di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 3B = 0 \\ 9A + 2C = 3 \\ 6B + D = 0 \\ 3C + \alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{4}, B = 0, C = \frac{3}{8}, \alpha = -\frac{9}{8}, D = 0$$

Quindi:

$$\int \frac{x^4 + 3x^2}{\sqrt{x^2+3}} dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\right)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

L'integrale a secondo membro si riconduce facilmente ad in integrale fondamentale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)$$

Da ciò segue il risultato:

$$\int x^2\sqrt{x^2+3}dx = \frac{1}{8}\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C$$

Esercizio 840

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{90}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Cioè:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\sqrt{1-x^2} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{91}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1-x^2} + \left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$$

cioè:

$$\begin{aligned} x^3 &= (2Ax+B)\left(1-x^2\right) + \left(-Ax^3-Bx^2-Cx\right)+\alpha \\ &= (-3A)\,x^3 + (-2B)\,x^2 + (2A-C)\,x + (B+\alpha) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -3A=1 \\ B=0 \\ 2A-C=0 \\ B+\alpha=0 \end{cases},$$

da cui:

$$A=-\frac{1}{3}, B=0, C=-\frac{2}{3}, \alpha=0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left(-\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2}+C \\ &= -\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C \end{aligned}$$

Esercizio 841

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{92}$$

***

Soluzione

Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)\sqrt{1-x^2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D\right)\sqrt{1-x^2} + \\ &+ \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}x^5 = &\left(-5A\right)x^5 + \left(-4B\right)x^4 + \left(4A - 3C\right)x^3 + \left(3B - 2D\right)x^2 \\ &+ \left(2C - E\right)x + \left(\alpha + D\right)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ -4B = 0 \\ 4A - 3C = 0 \\ 3B - 2D = 0 \\ 2C - E = 0 \\ \alpha + D = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{5}, B = 0, C = -\frac{4}{15}, \alpha = 0, D = 0, E = -\frac{8}{15}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left(-\frac{x^4}{5} - \frac{4}{15}x^2 - \frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C \\ &= -\frac{1}{15}\left(3x^4 + 4x^2 + 8\right)\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 842

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx \tag{93}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}} &= \left(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D\right)\sqrt{x^2+2x+2}+ \\ &+ \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+2x+2}}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}x^5 &= 5Ax^5 + (9A+4B)x^4 + (8A+7B+3C)x^3 \\ &+ (6B+5C+2D)x^2 + (4C+3D+E)x + (\alpha+2D+E)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 5A=1 \\ 9A+4B=0 \\ 8A+7B+3C=0 \\ 6B+5C+2D=0 \\ 4C+3D+E=0 \\ \alpha+2D+E=0 \end{cases},$$

da cui:

$$A=\frac{1}{5}, B=-\frac{9}{20}, C=\frac{31}{60}, D=\frac{7}{120}, E=-\frac{269}{120}, \alpha=\frac{17}{8}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \left(\frac{x^4}{5}-\frac{9}{20}x^3+\frac{31}{60}x^2+\frac{7}{120}x-\frac{269}{120}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+ \\ &+ \frac{17}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado, ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$$

Perciò:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{120}\left(24x^4-54x^3+62x^2+7x-269\right) + \frac{17}{8}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$$

Esercizio 843

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx \tag{94}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-x+1}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} &= A\sqrt{x^2-x+1}+(Ax+B)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2-x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\left[4Ax^2+(2B-3A)x+(2A-B+2\alpha)\right],\end{aligned}$$

cioè:

$$2x^2 = 4Ax^2+(2B-3A)x+(2A-B+2\alpha)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 4A = 2 \\ 2B - 3A = 0 \\ 2A - B + 2\alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{4}, \alpha = -\frac{1}{8}$$

Quindi:

$$X_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2x+3)$$

Perciò:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \tag{95}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -1 \\ l + k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}, l = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \\ &\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C_1$$

Ponendo $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right) + C_1 \\ &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - x + 1}\right) + C_1 \\ &= \ln\left(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right) + C_1 - \ln\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (102) ed incorporando $C_1 - \ln\sqrt{3}$ nella costante di integrazione C:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right) + C$$

Esercizio 844

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} \tag{96}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

e si riconduce a quelli del tipo dell'esercizio esercizio 839:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

attraverso il cambio di variabile:

$$x - x_0 = \frac{1}{t}$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$x = \frac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^6}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)\sqrt{1-t^2} + \alpha\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto alla variabile t:

$$\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \left(3At^2+2Bt+C\right)\sqrt{1-t^2} + \left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)\cdot\frac{(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}},$$

cioè:

$$
\begin{aligned}
t^4 &= \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\left(1 - t^2\right) + \left(-At^4 - Bt^3 - Ct^2 - Dt\right) + \alpha \\
&= -4At^4 - 3Bt^3 + (3A - 2C)\,t^2 + (2B - D)\,t + C + \alpha
\end{aligned}
$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$
\begin{cases}
-4A = 1 \\
-3B = 0 \\
3A - 2C = 0 \\
2B - D = 0 \\
C + \alpha = 0
\end{cases},
$$

da cui:

$$
A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = -\frac{3}{8}, D = 0, \alpha = \frac{3}{8}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \left(-\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t \\
&= \frac{1}{8}\left(2t^3 + 3t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Ripristinando la variabile x e ricordando che $F(t) = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$, otteniamo:

$$
\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{2+3x^2}{8x^4}\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C
$$

Esercizio 845

Calcolare l'integrale

$$
F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} \tag{98}
$$

***

Soluzione

Eseguiamo il cambio di variabile (v. esercizio 844):

$$
x + 1 = \frac{1}{t},
$$

da cui:

$$
dx = -\frac{dt}{t^2}
$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = (At+B)\sqrt{1-t^2} + \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto alla variabile t:

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = A\sqrt{1-t^2} + (At+B) \cdot \frac{(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}},$$

cioè:

$$t^2 = -2At^2 - Bt + A + \alpha$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -B = 0 \\ A + \alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0, \alpha = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t$$

Ripristinando la variabile x e ricordando che $F(t) = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$, otteniamo:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + C$$

Esercizio 846

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{99}$$

***

Soluzione
Si calcola applicando le **condizioni di Cebyscev** che riguardano gli integrali del tipo:

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

Nel nostro caso:

$$F(x) = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx,$$

per cui $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3$, per cui il cambio di variabile è (v. http://www.extrabyte.info/post/integrali/irrazionale.pdf)

$$1 + x^{1/4} = t^3,$$

da cui:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4, dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int \left(t^3 - 1\right)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt \\
&= 12 \int t^2 \left(t^3 - 1\right) dt = 12 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt\right) \\
&= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C, \quad \text{con } t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \left(4\sqrt[4]{x} - 3\right) \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C$$

Esercizio 847

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{100}$$

***

Soluzione

Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -1/2, n = 1/3, p = 1/4$, per le condizioni di Cebyscev non sono verificate. Pertanto l'integrale non è esprimibile attraverso una combinazione finita di funzioni elementari. Più precisamente si esprime attraverso la funzione ipergeometrica. In tal caso si può calcolare via software attraverso un programma di calcolo del tipo `Mathematica`, dopodiché se ne traccia il grafico, come riportato in figura 1

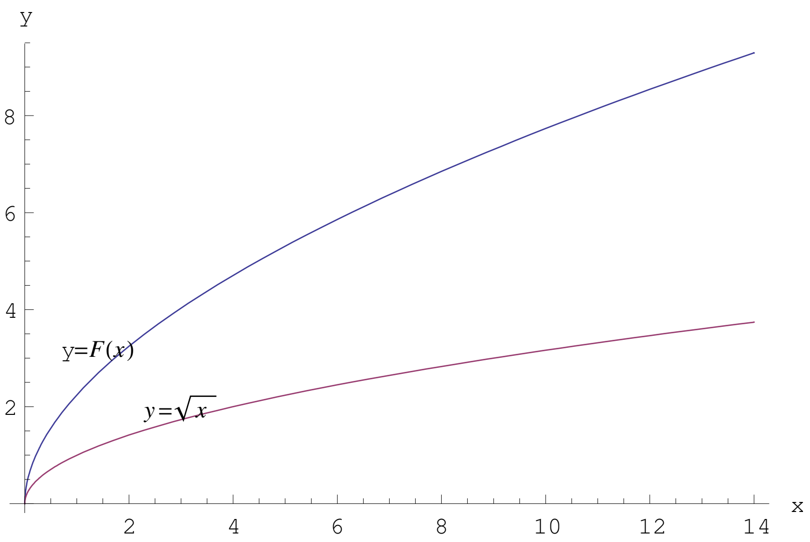


Figure 1: Grafico dell'integrale assegnato confrontato con il grafico di $\sqrt{x}$

Esercizio 848

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} \tag{101}$$

***

Soluzione
Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m=-1, n=5, p=-1/3$, per cui $\frac{m+1}{n}=0$. Segue allora che per le condizioni di Cebyscev il cambio di variabile è:

$$1+x^5=t^3,$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \left(t^3-1\right)^{1/5} \\ dx &= \frac{3}{5}t^2\left(t^3-1\right)^{-4/5} dt \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale in funzione di t è:

$$F(t) = \frac{3}{5} \int \frac{t}{t^3 - 1} dt,$$

che si calcola per riduzione in frazioni semplici:

$$\frac{t}{t^3 - 1} = \frac{1}{3(t-1)} - \frac{t-1}{3(t^2+t+1)}$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt \right)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi noti relativi ad integrali contenenti un trinomio di secondo grado:

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2} \ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3} \arctan \frac{1+2t}{\sqrt{3}}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5} \left[\sqrt{3} \arctan \frac{1+2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln\left(t^2+t+1\right) \right] + C$$
$$\text{con } t = \sqrt[3]{1+x^5}$$

Esercizio 849

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 \left(2+x^3\right)^{5/3}} \tag{102}$$

***

Soluzione
Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-2} \left(2+x^3\right)^{-5/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -2, n = 3, p = -5/3$, per cui $\frac{m+1}{n} + p = -2$. Segue allora che per le condizioni di Cebyscev il cambio di variabile è:

$$2x^{-3} + 1 = t^3,$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
x &= \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-1/3} \\
dx &= -\frac{t^2}{2}\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-4/3} dt
\end{aligned}
$$

Pertanto l'integrale in funzione di t è:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\frac{1}{4}\int \frac{t^3-1}{t^3}dt \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2t^2}+t\right) \\
&= -\frac{1+2t^3}{8t^2}+C,
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^2\right)^{5/3}} &= -\frac{1}{8}\frac{1+2\frac{2+x^3}{x^3}}{2\frac{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}{x^2}}+C \\
&= -\frac{3x^2+4}{8x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 850

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$
\int \sin^8 x \cos^5 x dx \tag{103}
$$

***

Soluzione
L'integrale proposto è del tipo:

$$
\int (\sin x)^m (\cos x)^n dx, \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}
$$

Il caso più semplice è quello in cui uno dei due interi realitivi m, n è positivo dispari, che è proprio il caso dell'integrale proposto. Infatti scriviamo:

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \int \sin^8 x \underbrace{\cos^4 x}_{=\left(1-\sin^2 x\right)^2} d(\sin x)$$
$$= \int \sin^8 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x)$$

Poniamo:

$$t = \sin x$$

Segue:

$$\int \sin^8 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x) = \int t^8 \left(1-t^2\right)^2 dt$$
$$= \int t^8 dt - 2\int t^{10} dt + \int t^{12} dt$$
$$= \frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{11}t^{11} + \frac{1}{13}t^{13} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + C$$

Esercizio 851

Calcolare l'integrale

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx \tag{104}$$

***

Soluzione

L'integrale proposto è del tipo già visto nell'esercizio 850, cioè:

$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n dx, \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Qui gli esponenti m, n sono entrambi interi positivi pari. In questo caso si cerca di utilizzare le formule:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \tag{105}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Scriviamo:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \underbrace{(\sin x \cos x)^2}_{=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2} dx$$
$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x d\left(2x\right)$$

Nell'ultimo integrale poniamo $t = 2x$:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 t dt$$

L'integrale $\int \sin^2 t dt$ si calcola per parti o utilizzando la prima delle (112):

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int \left(1 - \cos 2t\right) dt$$
$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C$$
$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Esercizio 852

Calcolare gli integrali:

$$\int \cos^3 x dx$$
$$\int \sin^5 x dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) \\ &= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x) \\ &= -\left[\int d(\cos x) - 2\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x)\right] \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 853

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

***

Soluzione

Fissiamo la nostra attenzione sull'esponente dispari cioè su $\cos^3 x$ potendo scrivere questo termine come $\cos^2 x \cdot \cos x$, in modo che il $\cos x dx = d(\sin x)$ e $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} d(\sin x) \\ &= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) d(\sin x) \\ &= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 854

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx \qquad (106)$$

***

Soluzione
Avendo esponenti dispari, l'integrale si calcola agevolemente "giocando" sugli esponenti. Tuttavia, in questo caso essendoci $x/2$ come argomento delle funzioni trigonometriche, è conveniente eseguire il cambio di variabile $t = \frac{x}{2}$, per cui l'integrale si scrive:

$$\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \sin^3 t\cos^5 tdt \tag{107}$$

Fissiamo la nostra attenzione su $\sin^3 t$ potendo scrivere questo termine come $\sin^2 t \cdot \sin t$, in modo che il $\sin tdt = -d(\cos t)$ e $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t\cos^5 tdt &= -\int \sin^2 t\cos^5 td(\cos t)\\ &= \int \left(\cos^2 t - 1\right)\cos^5 td(\cos t)\\ &= \int \left(\cos^7 t - \cos^5 t\right)d(\cos t)\\ &= \frac{1}{8}\cos^8 t - \frac{1}{6}\cos^6 t + C\end{aligned}$$

Sostituendo nella (114) e ripristinando la variabile x

$$\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2} + C$$

Esercizio 855

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx \tag{108}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}d(\sin x)\\ &= \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^3 x}d(\sin x)\end{aligned}$$

Ponendo $t = \sin x$ l'integrale diventa:

$$\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}dt,$$

che è l'integrale di una funzione razionale irregolare, per cui eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore, ottenendo:

$$\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3} = t - \frac{2t^2-1}{t^3}$$

Integrando per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}dt &= \frac{1}{2}t^2 - \int \frac{2t^2-1}{t^3}dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 - 2\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^3} \\ &= \frac{1}{2}t^2 - 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx = \frac{1}{2}\sin^2 x - 2\ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

Esercizio 856

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^4 x dx \tag{109}$$

***

Soluzione
Tenendo conto della nota relazione trigonometrica:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),$$

l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x dx\right),\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2x dx$, ponendo $t = 2x$ e tenendo conto della relazione trigonometrica:

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 2x dx &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t)\, dt \\ &= \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\sin 2t \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C\end{aligned}$$

Esercizio 857

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \tag{110}$$

***

Soluzione
Tenendo conto della nota relazione trigonometrica:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx \\ &\underset{t=2x}{=} \frac{1}{8}\int \sin^2 t dt,\end{aligned} \tag{111}$$

Per calcolare $\int \sin^2 t dt$ ricordiamo che

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(t - \cos 2t),$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 t dt &= \frac{1}{2}\int \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t
\end{aligned}
$$

Sostituendo in (118) e ripristinando la variabile x

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C \\
&= \frac{1}{32}(4x - \sin 4x) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 858

Calcolare l'integrale:

$$
\int \sin^2 x \cos^4 x dx \tag{112}
$$

***

Soluzione
Anziché utilizzare subito le formule trigonometriche, riscriviamo l'integrale nella forma:

$$
\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx,
$$

quindi utilizziamo le seguenti formule:

$$
\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),
$$

sostituendo:

$$
\begin{aligned}
\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx &= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos^2 2x\right)(1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int \cos^2 2x dx - \int \cos^3 2x dx\right)
\end{aligned} \tag{113}
$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2x dx$, $\int \cos^3 2x dx$

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2 2x dx &\underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) \\
&= \frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}
\end{aligned} \tag{114}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \cos^3 2x dx &\underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos^3 t dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 t\right) d\left(\sin t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)
\end{aligned} \tag{115}
$$

Sostituendo i risultati (121)-(122) nella (120):

$$
\begin{aligned}
&\int \sin^2 x\cos^4 x dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)\right]+C
\end{aligned}
$$

Cioè:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\cos^4 x dx &= \frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C \\
&= \frac{1}{192}\left(12x-3\sin 4x+\sin^3 2x\right)+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 859

Calcolare l'integrale:

$$
\int \cos^6 3x dx \tag{116}
$$

***

Soluzione
Eseguiamo innanzitutto il cambio di variabile

$$
t=3x, \tag{117}
$$

per cui:

$$\int \cos^6 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos^6 t dt \tag{118}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) &\Longrightarrow \cos^6 t = \frac{1}{8}(1 + \cos 2t) \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2t + 3\cos^2 2t + \cos^3 2t\right)
\end{aligned}$$

In tal modo l'integrale diventa

$$\int \cos^6 3x dx = \frac{1}{24}\left(t + \frac{3}{2}\sin 2t + 3\int \cos^2 2t dt + \int \cos^3 2t dt\right) \tag{119}$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2t dt$, $\int \cos^3 2t dt$. Per il primo integrale sappiamo già (v. esercizi precedenti) che:

$$\int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y$$

Quindi

$$\int \cos^2 2t dt = \frac{1}{2}\int \cos^2 y dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y\right) \underset{y=2t}{=} \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t \tag{120}$$

Il secondo integrale:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 2t dt &\underset{t=2y}{=} \frac{1}{2}\int \cos^3 y dy \qquad (121)\\
&= \frac{1}{2}\int \left(1 - \sin^2 y\right) d(\sin y) \\
&= \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{6}\sin^3 y \\
&= \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{6}\sin^3 2t
\end{aligned}$$

Sostituendo i risultati (127)-(128) nella (126):

$$\begin{aligned}
&\int \cos^6 3x dx \\
&= \frac{1}{24}\left(\frac{5}{2}t + 2\sin t + \frac{3}{8}\sin 4t - \frac{1}{6}\sin^3 2t + C\right)
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x attraverso la (124)

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 3x dx &= \frac{5}{16}x + \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{64} - \frac{\sin^3 6x}{144} + C \\
&= \frac{1}{576}\left(180x + 48\sin 6x + 9\sin 12x - 4\sin^3 6x\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 860

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{gathered}\int \frac{dx}{\sin^4 x} \\ \int \frac{dx}{\cos^6 x}\end{gathered} \tag{122}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota relazione trigonometrica:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \left(1 + \cot^2 x\right) \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\ &= -\int \left(1 + \cot^2 x\right) d\left(\cot x\right) \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\end{aligned}$$

In maniera simile si calcola il secondo integrale, tenendo conto della relazione:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \left(1 + \tan^2 x\right) \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)} \\ &= \int \left(1 + \tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\ &= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 861

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx \tag{123}$$

***

Soluzione
Procediamo per decomposizione:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^6 x} - \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

Abbiamo già calcolato l'integrale $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ nell'esercizio n. 860, risultando (omettiamo la costante di integrazione):

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x$$

Quindi calcoliamo $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$, utilizzando la relazione:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^6 x} &= \int \left(1 + \cot^2 x\right)^2 \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\
&= -\int \left(1 + \cot^2 x\right)^2 d\left(\cot x\right) \\
&= -\left[\int d\left(\cot x\right) + 2\int \cot^2 x d\left(\cot x\right) + \int \cot^4 x d\left(\cot x\right)\right] \\
&= -\cot x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x
\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = -\cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C$$

Esercizio 862

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} \tag{124}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota relazione:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cot^2 x} = \frac{\cot^2 x + 1}{\cot^2 x}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = -\int \frac{\left(\cot^2 x + 1\right)^2}{\cot^2 x} d\left(\cot x\right) \tag{125}$$

Poniamo $t = \cot x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(\cot^2 x + 1\right)^2}{\cot^2 x} d\left(\cot x\right) &= \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^2}{t^4} dt \\ &= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt \\ &= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3}\end{aligned} \tag{126}$$

Ripristinando la variabile x e ricordando il segno $-$ a secondo membro della (132):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= -\cot x + \frac{2}{\cot x} + \frac{1}{3\cot^3 x} + C \\ &= 2\tan x - \cot x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 863

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} \tag{127}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$F\left(x\right) = \int \frac{1}{\sin^5 x \cos x} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^3 x} &= \left(1 + \tan^2 x\right)^{3/2} \\ \frac{1}{\sin^5 x} &= \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^{5/2}}{\tan^5 x}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \int \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d\left(\tan x\right)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d\left(\tan x\right) &= \int \frac{\left(t^2+1\right)^3}{t^5} dt \\ &= \int \left(t + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 3\ln|t| - \frac{3}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \frac{1}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{3}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

Esercizio 864

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} \tag{128}$$

***

Soluzione

In tutti gli integrali del tipo $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ conviene utilizzare la nota relazione $\sin x = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \stackrel{def}{=} F\left(x\right)$$

Poniamo $y = \frac{x}{2}$

$$F\left(y\right) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^3 y \cos y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)}$$

Utilizziamo le formule:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin y} &= \left(1 + \frac{1}{\tan^2 y}\right)^{1/2} \Longrightarrow \frac{1}{\sin^3 y} = \frac{\left(1+\tan^2 y\right)^{3/2}}{\tan^3 y} \\ \frac{1}{\cos y} &= \left(1+\tan^2 y\right)^{1/2}\end{aligned}$$

perciò:

$$F\left(y\right) = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+\tan^2 y\right)^2}{\tan^3 y} d\left(\tan y\right)$$

A questo punto eseguiamo un ulteriore cambio di variabile ponendo $t = \tan y$

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{4}\int \frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^3}dt \\
&= \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|-\frac{1}{2t}\right)+C
\end{aligned}
$$

Qui è $t=\tan\frac{x}{2}$, per cui:

$$
\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} - \frac{1}{8\tan\frac{x}{2}} + C
$$

Esercizio 865

Calcolare i seguenti integrali:

$$
\int \frac{dx}{\cos^4 x} \tag{129}
$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \int \left(1+\tan^2 x\right) d(\tan x)
\end{aligned}
$$

Poniamo:

$$
t=\tan x,
$$

per cui:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \left(1+t^2\right)dt \\
&= t+\frac{1}{3}t^3+C \\
&= \tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 866

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{130}$$

***

Soluzione
Utilizziamo le formule di addizione:

$$\sin(x+\alpha) = \sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx &= \int \frac{\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha}{\sin x \cos x} dx \\ &= \cos\alpha \int \frac{dx}{\cos x} + \sin\alpha \int \frac{dx}{\sin x}\end{aligned} \tag{131}$$

Gli integrali $\int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{\sin x}$ sono integrali notevoli:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,\end{aligned} \tag{132}$$

avendo omesso la costante di integrazione. Sostituendo le (139) in (138), otteniamo il risultato dell'integrale:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx = \cos\alpha \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin\alpha \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

In particolare, per $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right] + C$$

Esercizio 867

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \tag{133}$$

***

Soluzione
Serviamoci della nota formula:

$$\sin x = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{32} \int \frac{dx}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} \tag{134}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \frac{x}{2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{16} \int \frac{dy}{\sin^5 y \cos^5 y} \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1}{\sin^5 y \cos^3 y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \end{aligned}$$

A questo punto serviamoci delle note formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^3 y} &= \left(1 + \tan^2 y\right)^{3/2} \\ \frac{1}{\sin^5 y} &= \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^{5/2}}{\tan^5 y} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(y) = \frac{1}{16} \int \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^4}{\tan^5 y} d(\tan y)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = \tan y$

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{16} \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^4}{t^5} dt \\ &= \frac{1}{16} \int \left(t^3 + 4t + \frac{6}{t} + \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} + 6 \ln |t| + 2t^2 + 4t^4\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4 \tan^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{\tan^2 \frac{x}{2}} + 6 \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + 2 \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan^4 \frac{x}{2}\right) + C \tag{135}$$

Tenendo conto delle note formule trigonometriche:

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad \cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \tag{136}$$

Sostituendo le (143) nelle (142) ed eseguendo le dovute semplificazioni, otteniamo:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{\cos x\,(3\cos^2 x - 5)}{8\sin^4 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \tag{137}$$

Esercizio 868

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x\sin^2 x^2 dx \tag{138}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = x^2$$

Quindi:

$$xdx = \frac{1}{2}dt$$

L'integrale diventa:

$$\int x\sin^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin^2 t dt$$

Utilizziamo la seguente formula trigonometrica:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t),$$

onde:

$$F(t) = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int x\sin^2 x^2 dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\sin 2x^2 + C$$

Esercizio 869

Integrali del tipo
$$\int \tan^n x dx, \quad \int \cot^n x dx, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{139}$$

***

Soluzione
Per $n = 1$ l'integrazione è immediata:

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C \\ \int \cot x dx &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C\end{aligned} \tag{140}$$

Per $n > 1$ utilizziamo nel caso di $\tan^n x$ la formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Longrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Ad esempio per $n = 2$
$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C \tag{141}$$

Per $n = 3$:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan x dx \\ &= \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x dx\end{aligned} \tag{142}$$

Tenendo conto della prima delle (147):
$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C \tag{143}$$

Osserviamo che tale risultato può essere riscritto come:
$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$$

Qui abbiamo usato $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, incorporando -1 nella costante di integrazione. Osserviamo che nella (150) è più elegante far comparire la $\tan x$ a secondo membro:

$$\ln|\cos x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$$

Quindi:

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + C \tag{144}$$

Per $n = 4$:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\tan^2 x dx \\ &= \int \tan^2 x d\left(\tan x\right) - \int \tan^2 x dx \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x dx\end{aligned}$$

Per la (148):

$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \tag{145}$$

***

Per il calcolo di $\int \cot^n x dx$ si procede utilizzando:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Longrightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 1$$

Eseguendo calcoli simili a quelli per $\tan^n x$, si ottiene:

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C \tag{146}$$
$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$$
$$\int \cot^4 x dx = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$

Osserviamo che nella seconda delle (153) è più elegante far comparire la $\cot x$ in luogo del $\sin x$ nell'argomento del logaritmo:

$$\ln|\sin x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1+\cot^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right)$$

Quindi:

$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right) + C$$

Esercizio 870

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \tan^2 3x dx \tag{147}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 3x$:

$$\int \tan^2 3x dx = \frac{1}{3} \int \tan^2 t dt$$

Ora scriviamo:

$$\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1,$$

che posta nella precedente:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 3x dx &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\int d(\tan t) - \int dt \right] \\ &= \frac{1}{3} (\tan t - t) + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \tan^2 3x dx = \frac{1}{3} (\tan 3x - 3x) + C$$

Esercizio 871

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \left(\sum_{n=1}^{4} \tan^n \frac{x}{n} \right) dx \tag{148}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=1}^{4} \int \tan^n \frac{x}{n} dx \\ &= \underbrace{\int \tan x dx}_{=F_1(x)} + \underbrace{\int \tan^2 \frac{x}{2} dx}_{=F_2(x)} + \underbrace{\int \tan^3 \frac{x}{3} dx}_{=F_3(x)} + \underbrace{\int \tan^4 \frac{x}{4} dx}_{=F_4(x)}\end{aligned}$$

Gli integrali $F_n(x)$ sono già stati calcolati nell'esercizio 879:

$$F_1(x) = \ln|\cos x| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$$

Per $F_2(x)$ poniamo $t = x/2$:

$$F_2(t) = 2\int \tan^2 t dt = 2\tan t - 2t$$
$$\Longrightarrow F_2(x) = 2\tan\frac{x}{2} - x$$

Per $F_3(x)$ poniamo $t = x/3$:

$$F_3(t) = 3\int \tan^3 t dt = 3\left[\frac{1}{2}\tan^2 t - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 t\right)\right]$$
$$\Longrightarrow F_2(x) = \frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{3}\right)$$

Per $F_4(x)$ poniamo $t = x/4$:

$$F_3(t) = 4\int \tan^4 t dt = 4\left(\tan^3 t - \tan t + t\right)$$
$$\Longrightarrow F_3(x) = 4\tan^3\frac{x}{4} - 4\tan\frac{x}{4} + x$$

Quindi:

$$\int\left(\sum_{n=1}^{4}\tan^n\frac{x}{n}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + 2\tan\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3}$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{3}\right) - 4\tan\frac{x}{4} + 4\tan^3\frac{x}{4}$$

Esercizio 872

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \tag{149}$$

***

Soluzione
Innanzitutto poniamo $y = \frac{x}{2}$, per cui:

$$F(t) = 2\int\frac{dy}{\sin y\cos^3 y} = 2\int\frac{1}{\sin y\cos y}\underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \tag{150}$$

Ora utilizziamo le formule:

$$\frac{1}{\sin y}=\frac{\left(1+\tan^2 y\right)^{1/2}}{\tan^2 y},\quad \frac{1}{\cos y}=\left(1+\tan^2 y\right)^{1/2},$$

che sostituite nella (157):

$$F\left(y\right)=2\int\frac{1+\tan^2 y}{\tan y}d\left(\tan y\right)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t=\tan y$:

$$\begin{aligned}F\left(t\right)&=2\int\frac{1+t^2}{t}dt\\&=2\left(\int\frac{dt}{t}+\int tdt\right)\\&=2\left(\ln|t|+\frac{1}{2}t^2\right)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\tan^2\frac{x}{2}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

Esercizio 873

Calcolare il seguente integrale:

$$F\left(x\right)=\int\sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx \tag{151}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}F\left(x\right)&=-\int\sin^4 x\sqrt[3]{\cos x}d\left(\cos x\right)\\&=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^4\left(\cos x\right)^{1/3}d\left(\cos x\right)\end{aligned}$$

Poniamo $t=\cos x$

$$\begin{aligned}F\left(t\right)&=-\int t^{1/3}\left(1-t^2\right)^2dt\\&=-\int\left(t^{1/3}-2t^{7/3}+t^{13/3}\right)dt\\&=-\left(\frac{3}{4}t^{1/3}-\frac{3}{5}t^{10/3}+\frac{3}{16}t^{13/3}\right)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} - \frac{3}{13}\sqrt[3]{\cos^{13} x} + C$$

Esercizio 874

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} \tag{152}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(\sin x)^{1/2} (\cos x)^{3/2}}$$

Ora cerchiamo di far comparire a denominatore $\cos^2 x$. Infatti possiamo scrivere

$$(\cos x)^{3/2} = (\cos x)^{-1/2} \cos^2 x$$

Perciò l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{(\sin x)^{1/2} (\cos x)^{-1/2}} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)} \\ &= \int \sqrt{\tan x} d(\tan x) \\ &= 2\sqrt{\tan x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 875

Scriviamo uno schema di calcolo per gli integrali del tipo:

$$\begin{aligned} &\int \sin ax \cos bx dx \\ &\int \cos ax \cos bx dx \\ &\int \sin ax \sin bx dx \end{aligned} \tag{153}$$

***

Soluzione
Si applicano le formule di Werner in modo da trasformare il prodotto nell'integrando in una somma algebrica di seni e coseni. Precisamente:

$$\begin{aligned}
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right] \\
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right]
\end{aligned}$$

Ad esempio proviamo a calcolare

$$\begin{aligned}
\int \sin 8x \sin 2x dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos 6x - \cos 10x\right)dx \\
&= \frac{1}{12}\sin 6x - \frac{1}{20}\sin 10x
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\int \cos 4x \cos 5x dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos 9x + \cos x\right)dx \\
&= \frac{1}{18}\sin 9x + \frac{1}{2}\sin x
\end{aligned}$$

Esercizio 876

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}
&\int \sin 4x \cos 5x dx \qquad (154) \\
&\int \sin 8x \sin 15x dx
\end{aligned}$$

***

Soluzione
Per il primo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right],$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\int \sin 4x \cos 5x dx &= \frac{1}{2}\left(\int \sin 9x - \sin x\right)dx \\
&= -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C
\end{aligned}$$

Per il secondo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right],$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin 8x \sin 15x dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos 7x - \cos 23x\right)dx \\ &= \frac{1}{14}\sin 7x - \frac{1}{46}\sin 23x + C\end{aligned}$$

Esercizio 877

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}&\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx \\ &\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}xdx\end{aligned} \tag{155}$$

***

Soluzione
Per il primo integrale applichiamo le formule:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right],$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5}{6}x + \cos\frac{x}{6}\right)dx \\ &= \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right]$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}xdx &= \frac{1}{2}\int\left(\sin x - \sin\frac{x}{3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x + 3\cos\frac{x}{3}\right) + C \\ &= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

Esercizio 878

Una grandezza fisica varia nel tempo secondo la legge:

$$f(t) = A \sin \omega t \cos(\omega t + \phi), \tag{156}$$

essendo A una costante, mentre ω e ϕ sono rispettivamente la pulsazione e la fase. Si determini:

$$F(t) = \int f(t)\, dt,$$

dimostrando che $F(t)$ non è periodica, a differenza di $f(t)$.

***

Soluzione
Per calcolare $F(t)$ ci serviamo delle formule di Werner:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Nel nostro caso: $\alpha = \omega t$, $\beta = \omega t + \phi$, donde:

$$\sin \omega t \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)]$$

Integrando:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{A}{2} \left[\cos \phi \int dt - \int \cos(2\omega t + \phi)\, dt \right] \\ &= A \left[\frac{t}{2} \cos \phi - \frac{\sin(2\omega t + \phi)}{4\omega} \right] + C, \end{aligned} \tag{157}$$

da cui vediamo che la funzione $F(t)$ non è periodica, mentre $f(t)$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{\omega}$. In figura 2 è riportato l'andamento di entrambe le funzioni.

Esercizio 879

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos(\alpha x + \beta) \cos(\alpha x - \beta)\, dx \tag{158}$$

***

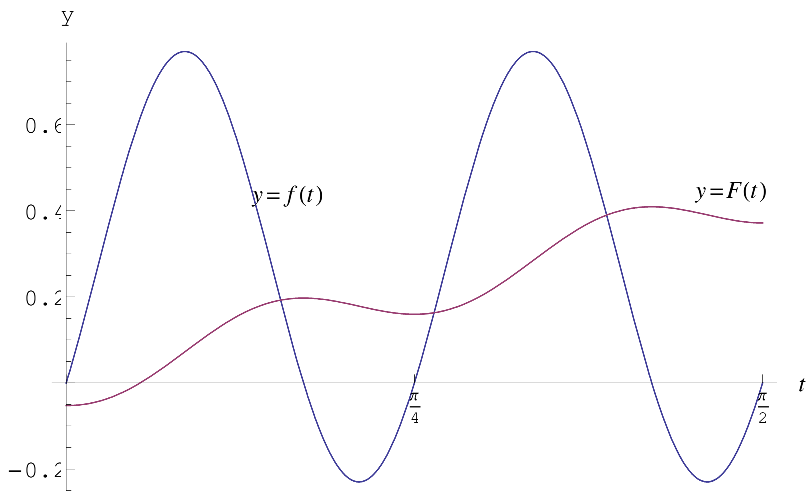


Figure 2: Diagramma cartesiano di $f(t)$ e della sua primitiva $F(t)$ corrispondente a $C = 0$.

Soluzione
Utilizziamo le formule di Werner:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad \cos \varphi \cos \psi = \frac{1}{2} \left[\cos (\varphi + \psi) + \cos (\varphi - \psi) \right]$$

Poniamo: $\varphi = \alpha x + \beta$, $\psi = \alpha x - \beta$, onde:

$$\cos (\alpha x + \beta) \cos (\alpha x - \beta) = \frac{1}{2} \left[\cos (2\alpha x) + \cos 2\beta \right]$$

Integrando:

$$\begin{aligned} &\int \cos (\alpha x + \beta) \cos (\alpha x - \beta) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos (2\alpha x) \, dx + \frac{1}{2} \cos 2\beta \int dx \\ &= \frac{1}{4\alpha} \sin (2\alpha x) + \frac{x}{2} \cos 2\beta + C \end{aligned}$$

Esercizio 880

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^2 x \cos 3x dx \tag{159}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \cos^2 x \cos 3x dx = \int \cos x \cos x \cos 3x dx$$

Il prodotto $\cos x \cos 3x$ può essere convertito in somma con le formule di Werner:

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x),$$

onde:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos x (\cos 2x + \cos 4x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int \cos x \cos 2x dx + \int \cos x \cos 4x dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 3x) dx + \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos 5x) dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(\int \cos x dx + 2 \int \cos 3x dx + \int \cos 5x dx \right) \\
&= \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 5x}{20} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 881

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx \tag{160}$$

***

Soluzione
Conviene dapprima convertire il prodotto $\sin x \sin 2x$ in una somma, tramite le formule di Werner. Otteniamo:

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x),$$

per cui l'integrale diviene:

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 3x) \sin 3x dx \tag{161}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\int \cos x \sin 3x dx - \int \cos 3x \sin 3x dx \right)$$

Applichiamo ora le formule di Werner all'integrando dell'integrale $\int \cos x \sin 3x dx$ a secondo membro (168):

$$\sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \tag{162}$$

Si noti che non è necessario applicare Werner all'integrando di $\int \cos 3x \sin 3x dx$ giacché l'argomento è $3x$, donde:

$$\int \cos 3x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx = -\frac{1}{2} \cos 6x$$

Attraverso la (169) calcoliamo $\int \cos x \sin 3x dx$:

$$\int \cos x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \left(\int \sin 4x dx + \int \sin 2x dx \right)$$
$$= -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4}$$

Sostituendo i risultati ottenuti in 168

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Esercizio 882

Consideriamo integrali del tipo:

$$\int \mathcal{R} (\sin x, \cos x) \, dx, \tag{163}$$

essendo $\mathcal{R}$ una funzione razionale delle variabili $\sin x$, $\cos x$. Ad esempio:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 2} \tag{164}$$

Qui è

$$\mathcal{R} (\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 2}$$

***

Soluzione
Un integrale del tipo (170) si riduce all'integrale di una funzione razionale attraverso il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2} \tag{165}$$

Applicando note formule di trigonometria:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{166}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{167}$$

In tal modo l'integrale (171) diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2-t^2}{1+t^2} + 2} \\ &= 2\int \frac{dt}{2t + 2 - 2t^2 + 2 + 2t^2} \\ &= \int \frac{dt}{t+2} = \ln|t+2| + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2} = \ln\left|2 + \tan\frac{x}{2}\right| + C \tag{168}$$

Esercizio 883

Integrazione di alcune classi di funzioni trigonometriche
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Il metodo visto nell'esercizio 832 permette di ridurre un qualunque integrale

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx \tag{169}$$

nell'integrale di una funzione razionale:

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Tale metodo è denominato **sostituzione universale di variabile.** Si osservi però che tale metodo a volte conduce ad espressioni razionali troppo complicate. Esaminiamo ora alcuni casi speciali che suggeriscono un differente cambio di variabile.

1. $\mathcal{R}(-\sin x, -\cos x) \equiv \mathcal{R}(\sin x, \cos x)$, cioè la funzione razionale $\mathcal{R}$ è pari. Ciò si verifica quando l'integrando contiene termini del tipo $\sin^n x$, $\cos^m x$ con n, m interi naturali pari. Osserviamo che in tal caso $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ si esprimono attraverso espressioni razionali di $\tan x$. Precisamente:
$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$
Poniamo quindi:
$$t = \tan x$$
Perciò:
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$
Quindi il dx:
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$
Consideriamo ad esempio l'integrale:
$$\int \frac{dx}{2+\sin^2 x} dx$$
Qui $\mathcal{R}(\sin x) = \sin^2 x$, è manifestamente pari, da cui:
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+3t^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + C \end{aligned} \quad (170)$$

2. $\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx$. Il cambio di variabile è $\sin x = t \Longrightarrow \cos x dx = dt$, da cui:
$$\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx = \int \mathcal{R}(t)\, dt$$

3. $\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx$. Il cambio di variabile è $\cos x = t \Longrightarrow \sin x dx = -dt$, da cui:
$$\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx = -\int \mathcal{R}(t)\, dt$$
Ad esempio
$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{2+\cos x} dx \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x dx \\ &= \int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx, \end{aligned}$$

perciò $\cos x = t$, da cui:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}(\cos x)\sin x dx &= -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt \\ &= \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2|\end{aligned}$$

4. $\int \mathcal{R}(\tan x)\, dx$. Il cambio di variabile è $t = \tan x \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$, per cui:

$$\int \mathcal{R}(\tan x)\, dx = \int \frac{\mathcal{R}(t)}{1+t^2}dt$$

Esercizio 884

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \tag{171}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2} \tag{172}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{173}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{174}$$

In tal modo il primo dei due integrali (178):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale eseguiamo lo stesso cambio di variabile, ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} + C \tag{175}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale notevole (si calcola comunque per riduzione in frazioni semplici):

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C,$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C$$

Osserviamo che l'argomento del logaritmo può essere snellito attraverso le formule di addizione per la tangente. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} &= \frac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{\pi}{4}} = \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\Longrightarrow \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| = \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| = \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \end{aligned}$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

Esercizio 885

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2} \tag{176}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{177}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{178}$$

In tal modo l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= 2\int \frac{dt}{3+3t^2+5-5t^2} \\
&= \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C
\end{aligned}$$

Esercizio 886

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -\int \frac{dt}{t^2-2t-1} \stackrel{def}{=} F(t)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi già visti (riduzione in frazioni semplici, oppure con il metodo degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado), ottenendo:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Cioè:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Esercizio 887

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right) dx \\ &= x - G(x) + \text{const}, \end{aligned}$$

essendo:

$$G(x) = \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} 2\frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int dt = t + \text{const}, \end{aligned}$$

quindi:

$$F(x) = \tan\frac{x}{2} + \text{const}$$

Esercizio 888

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$$

***

Soluzione

$$F(x) = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{1-\sin x} dx = -x + J(x)$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:
$$t = \tan \frac{x}{2},$$
donde:
$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + \text{const}, \end{aligned}$$
quindi:
$$G(x) = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$
Cosicché l'integrale vale:
$$F(x) = -x - \frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

Esercizio 889

Calcolare il seguente integrale:
$$F(x) = \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:
$$t = \tan \frac{x}{2}$$
Quindi:
$$F(t) = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15}$$
L'integrale suddetto si risolve metodi noti (ad esempio, con il metodo di integrazione di funzioni contenenti un trinomio di secondo grado), ottenendo:
$$F(t) = \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C,$$
da cui:
$$F(x) = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 5}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right| + C$$

Esercizio 890

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx \tag{179}$$
$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x}dx$$

***

Soluzione
In questi casi non conviene applicare la sostituzione universale di variabile. Infatti per il primo integrale osserviamo che:

$$d\left(3\sin x + 2\cos x\right) = \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx, \tag{180}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx &= \int \frac{d\left(3\sin x + 2\cos x\right)}{3\sin x + 2\cos x} \\ &= \ln\left|3\sin x + 2\cos x\right| + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale osserviamo che il denominatore della funzione integranda è lo stesso, per cui continua a valere la (187), in cui vediamo che differesce con il numeratore per il segno $(-)$. Ciò suggerisce di esprimere il numeratore attraverso una combinazione lineare del denominatore e della sua derivata prima:

$$2\sin x + 3\cos x = a\left(3\sin x + 2\cos x\right) + b\frac{d}{dx}\left(3\sin x + 2\cos x\right), \tag{181}$$

onde:

$$\begin{aligned}\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}dx &= a\int dx + b\int \frac{d\left(3\sin x + 2\cos x\right)}{3\sin x + 2\cos x} \\ &= ax + b\ln\left|3\sin x + 2\cos x\right| + C\end{aligned} \tag{182}$$

A questo punto dobbiamo determinare i coefficienti a, b della combinazione lineare (188):

$$\begin{aligned}2\cos x + 3\cos x &= 3a\sin x + 2a\cos x + 3b\cos x - 2b\sin x \\ &= (3a - 2b)\sin x + (2a + 3b)\cos x,\end{aligned}$$

da cui otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases}$$

Risolviamolo con il metodo dei determinanti:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{13}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{5}{13}$$

Sostituendo la soluzione $(a,b) = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ nella (189):

$$\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x} dx = \frac{12}{13} x + \frac{5}{13} \ln |3\sin x + 2\cos x| + C$$

Esercizio 891

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$$

***

Soluzione

Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Conviene prima riscrivere l'integrale:

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + 3} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Ma:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x),$$

donde eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} &= \int \frac{dy}{4 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 892

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$$

***

Soluzione
Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Conviene prima riscrivere l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} \\
&= \int \frac{dx}{3\tan^2 x + 5} \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{1}{5 + 3\tan^2 x} d(\tan x),
\end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\
\frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x),
\end{aligned}$$

quindi eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{dy}{5 + 3y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 893

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$$

***

Soluzione
Conviene riscrivere l'ìntegrale:

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 3\tan x - 1)} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}\end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2 + 3y - 1}$$

L'integrale a secondo membro è facilmente calcolabile: si procede per decomposizione in frazioni semplici, oppure scrivendo $y^2 + 3y - 1 = (y+k)^2 + l$, determinando k, l. Quindi otteniamo:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\tan x + 3 - \sqrt{13}}{2\tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$$

Esercizio 894

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$$

***

Soluzione
Questo integrale è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx,$$

per cui conviene eseguire il cambio di variabile $y = \cos x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx &= -\int \frac{dy}{(1-y)^3} \\ &= \int \frac{d(1-y)}{(1-y)^3} \\ &= -\frac{1}{2(1-y)^2} + C\end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx = -\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$$

Esercizio 895

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx \tag{183}$$

***

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione universale di variabile: $t = \tan \frac{x}{2}$, per cui:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

In tal modo l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{tdt}{(t^2+1)(t+1)^2},\end{aligned}$$

che si integra per riduzione in frazioni semplici:

$$\frac{t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Anziché procedere in questo modo osserviamo che l'integrale può essere scritto come:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1+\sin x - 1}{1+\sin x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right) dx \\ &= x - \int \frac{dx}{1+\sin x}\end{aligned} \tag{184}$$

Ed è più semplice risolvere $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ con il metodo della sostituzione universale di variabile. Infatti:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= -\frac{2}{t+1} + C \\ &= -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (191):

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = x + \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C$$

Esercizio 896

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx \tag{185}$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione universale di variabile: $t = \tan\frac{x}{2}$, per cui:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

In tal modo l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{1-t^2}{t^2-2t+1}dt,\end{aligned}$$

In realtà l'integrale proposto è immediato, poichè:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx &= -\int \frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x} \\ &= -\ln|1-\sin x| + C\end{aligned}$$

Esercizio 897

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\tan x}{1-\cos x}dx \tag{186}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto può essere scritto come:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(1-\cos x)}dx,$$

che è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\cos x)\sin x dx$$

Come abbiamo visto nell'esercizio 832, il cambio di variabile è $\cos x = t$, per cui $\sin x dx = -dt$, onde:

In realtà l'integrale proposto è immediato, poichè:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\cos x)}dx = -\int \frac{dt}{t\,(t-1)} \tag{187}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trigonometrica all'integrale di una funzione razionale propria, per cui procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t\,(t-1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \\ &= \frac{(A+B)\,t - A}{t\,(t-1)} \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Longrightarrow A=-1, B=1$$

Perciò:

$$\frac{1}{t\,(t-1)} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C$$

Ripristinando al variabile x e osservando che $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$

$$\int \frac{\tan x}{1-\cos x}dx = \ln\frac{1-\cos x}{|\cos x|} + C$$

Esercizio 898

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} \tag{188}$$

***

Soluzione

Quest'integrale è del tipo di quelli calcolati negli esercizi 862 e seguenti, quindi cerchiamo di far comparire il $d\,(\tan x)$:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin x}d\,(\tan x) \tag{189}$$

Ora, da una nota formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^{1/2}}{\tan x},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^{1/2}}{\tan x}d\,(\tan x)$$

Ponendo $t = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^{1/2}}{t} dt$$

Non abbiamo risolto granchè visto che abbiamo l'integrale di una funzione irrazionale. La (196) ci suggerisce di integrare per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} d\left(\tan x\right) &= \frac{\tan x}{\sin x} + \int \tan x d\left(\frac{1}{\sin x}\right) \\
&= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}
\end{aligned}$$

$\int \frac{dx}{\sin x}$ è un integrale notevole:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C, \tag{190}$$

onde:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \tag{191}$$

Esiste un terzo metodo che consiste nel porre $\cos x = t \Longrightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right) t^2} \\
&= -\int \frac{\left(1-t^2\right)+t^2}{\left(1-t^2\right) t^2} dt \\
&= -\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt \\
&= -\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} \\
&= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C \\
&= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

Per riprodurre il risultato (198) applichiamo le formule di bisezione:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

cosicchè:

$$\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|^2 = \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

Esercizio 899

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx \tag{192}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}dx \\ &= 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}d(\sin x) \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} F(y) &= 2\int \frac{ydy}{1+y^2} \\ &= \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} \\ &= \ln\left(1+y^2\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$F(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right) + C$$

Esercizio 900

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx \tag{193}$$

***

Soluzione
Ques'integrale è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx$$

Come è noto, in questo caso il cambio di variabile è $y = \sin x \Longrightarrow \cos x dx = dy$, perciò:
Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx &= \int \frac{dy}{y^2 - 6y + 5} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-5}{y-1}\right| + C \end{aligned}$$

Da cui:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right| + C$$

Esercizio 901

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\tan x}{1-\sin x}dx \tag{194}$$

***

Soluzione
Anche se l'integrale non è del tipo $\int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx$ proviamo comunque a porre $t = \sin x \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$, per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\sin x)}dx &= \int \frac{tdt}{\cos^2 x\,(1-t)}dt \\ &= \int \frac{tdt}{(1-t^2)\,(1-t)} \\ &= \int \frac{tdt}{(1-t)^2\,(1+t)},\end{aligned}$$

quindi si procede per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1-t)^2\,(1+t)} &= \frac{A_1}{1-t} + \frac{A_2}{(1-t)^2} + \frac{B}{1+t} \\ &= \frac{A_1\,(1-t)\,(1+t) + A_2\,(1+t) + B\,(1-t)^2}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ &= \frac{(-A_1+B)\,t^2 + (A_2-2B)\,t + (A_1+A_2+B)}{(1-t)^2\,(1+t)}\end{aligned}$$

Per il principio di idendità dei polinomi otteniamo il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{cases} -A_1 + B = 0 \\ A_2 - 2B = 1 \\ A_1 + A_2 + B \end{cases},$$

La cui soluzione è

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4},$$

quindi

$$\frac{t}{(1-t)^2\,(1+t)} = \frac{1}{4\,(t-1)} - \frac{1}{4\,(t+1)} + \frac{1}{2\,(t-1)^2}$$

Integrando:

$$\int \frac{t}{(1-t)^2\,(1+t)}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2\,(t-1)} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\sin x)}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + \frac{1}{2\,(1-\sin x)} + C$$

Esercizio 902

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \tag{195}$$

***

Soluzione
Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 4\sin x - 6 &= 1 - \sin^2 x - 4\sin x - 6 \\ &= -\left(\sin^2 x + 4\sin x + 5\right),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \\ &= -\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4\sin x + 5} = \int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx,\end{aligned}$$

onde il cambio di variabile è $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dt$

$$F(t) = -\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}$$

Scriviamo:

$$t^2 + 4t + 5 = t^2 + 4t + 4 + 1 = (t+2)^2 + 1,$$

quindi:

$$F(t) = -\int \frac{d(t+2)}{1+(t+2)^2} = -\arctan(t+2) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} = -\arctan(\sin x + 2) + C$$

Esercizio 903

Calcolare il seguente integrale
$$\int \cosh^2 x dx \tag{196}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left(\cosh 2x + 1\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 x dx &= \frac{1}{2}\int \left(\cosh 2x + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\int \cosh 2x + \frac{1}{2}\int dx \\ &= \frac{1}{4}\cosh 2x + \frac{1}{2}x + C \\ &= \frac{1}{4}\left(\cosh 2x + 2x\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio 904

Calcolare il seguente integrale
$$\int \cosh^3 x dx \tag{197}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \cosh^3 x dx = \int \cosh^2 x \cosh x dx \tag{198}$$

Osserviamo che:
$$\cosh x dx = d\left(\sinh x\right)$$

Inoltre, ricordiamo che $\sinh x$ e $\cosh x$ sono legate dalla nota formula:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

da cui:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

Sostituendo in (205):

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \left(1+\sinh^2 x\right) d\left(\sinh x\right) \\ &= \int d\left(\sinh x\right) + \int \sinh^2 x d\left(\sinh x\right) \\ &= \sinh x + \frac{1}{3}\sinh^3 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 905

Calcolare il seguente integrale

$$\int \sinh^3 x dx \tag{199}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sinh^3 x dx = \int \sinh^2 x \sinh x dx \tag{200}$$

Osserviamo che:

$$\sinh x dx = d\left(\cosh x\right)$$

Inoltre:

$$\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

Sostituendo in (207):

$$\begin{aligned}\int \sinh^3 x dx &= \int \left(\cosh^2 x - 1\right) d\left(\cosh x\right) \\ &= \int \cosh^2 x d\left(\cosh x\right) - \int d\left(\cosh x\right) \\ &= \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C\end{aligned}$$

Esercizio 906

Calcolare il seguente integrale

$$\int \cosh^4 x dx \tag{201}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1),$$

quindi:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \cosh^4 x dx = \frac{1}{4}\int (\cosh 2x + 1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\int \cosh^2 2x dx}_{\stackrel{def}{=} F_1(x)} + \sinh 2x + x\right) \end{aligned}$$

Per calcolare $F_1(x)$ poniamo $t = 2x \Longrightarrow F_1(t) = \frac{1}{2}\int \cosh^2 t dt$ che abbiamo già calcolato nell'esercizio 903, risultando $\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{4}\cosh 2t + \frac{t}{2}$, onde:

$$F_1(x) = \frac{\sinh 4x}{8} + \frac{x}{2}$$

Finalmente:

$$\int \cosh^4 x dx = \frac{\sinh 4x}{32} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{3}{8}x + C$$

Esercizio 907

Calcolare i seguenti integrali

$$\begin{aligned} &\int \sinh^5 x \cosh x dx \qquad (202) \\ &\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx \end{aligned}$$

***

Soluzione
Il primo integrale è immediato:

$$\begin{aligned} \int \sinh^5 x \cosh x dx &= \int \sinh^5 x d(\sinh x) \\ &= \frac{\sinh^6 x}{6} + C \end{aligned}$$

Per il secondo invece, utilizziamo la nota formula:

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x,$$

onde:

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sinh^2 2x dx$$

Poniamo $t = 2x$:

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sinh^2 t dt \tag{203}$$

L'integrale $\int \sinh^2 t dt$ può essere determinato a partire da $\int \cosh^2 t dt$ che abbiamo già calcolato nell'esercizio 903

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{4} \cosh 2t + \frac{t}{2}$$

Ma

$$\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1,$$

per cui:

$$\begin{aligned} \int \sinh^2 t dt &= \frac{1}{4} \cosh 2t + \frac{t}{2} - t \\ &= \frac{1}{4} \cosh 2t - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (210):

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{\cosh 4x}{32} - \frac{x}{16} + C$$

Esercizio 909

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} \tag{204}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} &= \int \frac{1}{\sinh x} d(\tanh x) \\ &= \frac{1}{\cosh x} - \int \tanh \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sinh x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\cosh x} + \int \frac{dx}{\sinh x} \end{aligned} \tag{205}$$

$\int \frac{dx}{\sinh x}$ è un integrale notevole (v. esercizio 908):

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right|$$

Sostutendo nella (212):

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} + \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

Esercizio 910

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} \tag{206}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x,$$

onde:

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\sinh^2 (2x)}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x$

$$4 \int \frac{dx}{\sinh^2 (2x)} = 2 \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -2 \coth t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = -2 \coth 2x + C$$

Esercizio 911

Calcolare il seguente integrale

$$\int \tanh^3 x dx \tag{207}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \tanh^3 x dx = \int \tanh^2 x \tanh x dx \tag{208}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh^2 x} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^{=1}}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \\ &\Longrightarrow \tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x},\end{aligned}$$

che sostituita nella (215) porge:

$$\begin{aligned}\int \tanh^3 x dx &= \int \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 x}\right) \tanh x dx \\ &= \int \tanh x dx - \int \tanh d(\tanh x) \\ &= \int \frac{d(\cosh x)}{\cosh x} - \frac{1}{2} \tanh^2 x \\ &= \ln(\cosh x) - \frac{1}{2} \tanh^2 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 912

Calcolare il seguente integrale

$$\int \coth^4 x dx \tag{209}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \coth^4 x dx = \int \coth^2 x \coth^2 x dx \tag{210}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^{=1}}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1 \\ &\Longrightarrow \coth^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x} + 1,\end{aligned}$$

che sostituita nella (217) porge:

$$\begin{aligned}\int \coth^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{\sinh^2 x}+1\right)\coth^2 x dx \\ &= -\int \coth^2 x d\left(\coth x\right) + \int \coth^2 x dx \\ &= -\frac{1}{3}\coth^3 x + \int \coth^2 x dx\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned}\int \coth^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{\sinh^2 x}+1\right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\sinh x} + \int dx \\ &= -\int d\left(\coth x\right) + x \\ &= -\coth x + x\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \coth^4 x dx = x - \frac{1}{3}\coth^3 x - \coth x + C$$

Esercizio 913

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x + \cosh^2 x} \tag{211}$$

***

Soluzione

Mettiamo in evidenza a denominatore $\cosh^2 x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh^2 x + \cosh^2 x} &= \int \frac{dx}{\cosh^2 x\left(\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}+1\right)} \\ &= \int \frac{1}{\tanh^2 x + 1}\frac{dx}{\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{1}{\tanh^2 x + 1} d\left(\tanh x\right) \\ &= \arctan\left(\tanh x\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio 914

Calcolare il seguente integrale
$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} \tag{212}$$
***

Soluzione
Qui conviene esplicitare $\sinh x$ e $\cosh x$:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} &= \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} \\
&= 2\int \frac{dx}{5e^x + e^{-x}} \\
&= 2\int \frac{e^{-x}dx}{5 + e^{-2x}}
\end{aligned}$$

Poniamo $t = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
2\int \frac{e^{-x}dx}{5 + e^{-2x}} &= -2\int \frac{dt}{5 + t^2} \\
&= -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{5}}\right) + C$$

È possibile mettere il risultato in una forma più elegante procedendo in questo modo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} &= \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} \\
&= 2\int \frac{dx}{5e^x + e^{-x}} \\
&= 2\int \frac{e^{x}dx}{1 + 5e^{2x}}
\end{aligned}$$

Poniamo $t = e^x$

$$\begin{aligned}
2\int \frac{e^x dx}{1+5e^{2x}} &= 2\int \frac{dt}{1+5t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\sqrt{5}t\right)}{1+\left(\sqrt{5}t\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\sqrt{5}t\right) + C
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(e^x\sqrt{5}\right) + C$$

Esercizio 915

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} \tag{213}$$

***

Soluzione

Applichiamo la nota relazione:

$$-\frac{1}{\sinh x - \cosh x} = \sinh x + \cosh x$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\tanh x - 1} &= -\int \cosh x \left(\sinh x + \cosh x\right) dx \\
&= -\int \sinh x \cosh x dx - \int \cosh^2 x dx
\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro si calcola facilmente:

$$\int \sinh x \cosh x dx = \frac{1}{2}\int \sinh 2x dx = \frac{1}{4}\cosh 2x$$

Il secondo integrale è già stato calcolato in un esercizio precedente, risultando:

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} = -\frac{1}{4}\cosh 2x - \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2} + C$$

Possiamo esprimere il risultato in una forma più elegante, esplicitando il $\cosh 2x$:

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

Sostituendo nell'equazione precedente e incorporando il termine 1/4 nella costante di integrazione:

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} = -\frac{1}{4}\left(2\sinh^2 x + \sinh 2x + 2x\right) + C$$

Esercizio 916

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx \tag{214}$$

***

Soluzione
Applichiamo la nota relazione:

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx = \int \frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh^2 x - 1}} dx$$

Poniamo:

$$t = \sqrt{2}\cosh x,$$

per cui:

$$dt = \sqrt{2}\sinh x dx$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh^2 x - 1}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{2\cosh^2 x - 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}\right| + C
\end{aligned}$$

Esercizio 917

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\cosh^4 x} \tag{215}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \tag{216}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\int \frac{dx}{\cosh^4 x} = \int \frac{1}{\cosh^2 x} \underbrace{\frac{dx}{\cosh^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Tenendo conto della (223):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cosh^4 x} &= \int \left(1 - \tanh^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\ &= \tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x + C \end{aligned}$$

Esercizio 918

Calcolare il seguente integrale

$$\int e^x \cosh x dx \tag{217}$$

***

Soluzione
Esplicitiamo il $\cosh x$:

$$\begin{aligned} \int e^x \cosh x dx &= \int e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(e^{2x} + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + x\right) + C \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 919

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x \sinh x dx \tag{218}$$
$$\int x \cosh x dx$$

***

Soluzione
Entrambi gli integrali si calcolano per parti. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int x \sinh x dx &= \int x d\left(\cosh x\right)\\ &= x \cosh x - \int \cosh x dx\\ &= x \cosh x - \sinh x + C\end{aligned}$$

Il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int x \cosh x dx &= \int x d\left(\sinh x\right)\\ &= x \sinh x - \int \sinh x dx\\ &= x \sinh x - \cosh x + C\end{aligned}$$

Esercizio 920

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \sinh x dx \tag{219}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh x dx &= \int x^2 d\left(\cosh x\right) \qquad (220)\\ &= x^2 \cosh x - 2 \int x \cosh x dx\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. Anche qui integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int x \cosh x dx &= \int x d(\sinh x) \\ &= x \sinh x - \int \sinh x dx \\ &= x \sinh x - \cosh x + C_1\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (227):

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh x dx &= x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + C \\ &= \left(x^2 + 2\right) \cosh x - 2x \sinh x + C\end{aligned}$$

Esercizio 927

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$3 - 2x - x^2 = -(x+1)^2 + 4$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x + 1 = 2 \sin t \Longrightarrow dx = 2 \cos t dt$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx &= 2 \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cos t dt \\ &= 4 \int \cos^2 t dt \\ &= 2 \int (\cos 2t + 1) dt \\ &= 2 \sin t \cos t + 2t + C\end{aligned}$$

Ripristiniamo x:

$$\begin{aligned}\cos t &= \sqrt{1-\sin^2 t} \\ &= \sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}\end{aligned}$$

Perciò:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

Esercizio 928

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = 3\sinh t,$$

donde:

$$dx = 3\cosh t, \;\; x^2+9 = 9\cosh^2 t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 9\int \sinh^2 t dt \tag{221}$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 t dt &= \frac{1}{2}\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sinh t \cosh t - \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (228)

$$F(t) = \frac{9}{2}\sinh t \cosh t - \frac{9}{2}t + C$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\operatorname{arcsin\,h}\frac{x}{3} + C$$

Possiamo esprimere arcsinh$\frac{x}{3}$ attraverso la funzione logaritmo. Infatti, è noto che:

$$\operatorname{arcsin\,h} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

per cui:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsin\,h}\frac{x}{3} &= \ln\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9+x^2}\right) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{9+x^2}\right) - \ln 3\end{aligned}$$

Incorporando $-\ln 3$ nella costante di integrazione:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln\left(x + \sqrt{9+x^2}\right) + C$$

Esercizio 929

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx = \int \sqrt{(x-1)^2+1}dx$$

Quindi eseguiamo la sostituzione:

$$x-1=\sinh t,$$

donde:

$$dx=\cosh t,\ \ \sqrt{(x-1)^2+1}=\cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t)=\int\cosh^2 t dt \tag{222}$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t=2\cosh^2 t-1,$$

ricaviamo

$$\cosh^2 t=\frac{1}{2}(\cosh 2t+1)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int\sinh^2 t dt&=\frac{1}{2}\int(\cosh 2t+1)\,dt\\&=\frac{1}{4}\sinh 2t+\frac{t}{2}\\&=\frac{1}{2}\sinh t\cosh t+\frac{t}{2}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (229)

$$F(t)=\frac{1}{2}\sinh t\cosh t+\frac{t}{2}+C$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\int\sqrt{x^2-2x+2}dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsin h}(x-1)+C$$

Esprimiamo arcsinh$(x-1)$ attraverso la funzione logaritmo.

$$\operatorname{arcsin h}(x-1)=\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

Quindi

$$\int\sqrt{x^2-2x+2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)+C$$

Esercizio 930

Calcolare l'integrale:

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$x^2+x+1=(x+k)^2+l=x^2+2kx+k^2+l$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2k=1 \\ k^2+l=1 \end{cases} \Longrightarrow k=\frac{1}{2},\ l=\frac{3}{4}$$

Perciò:

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}dx=\int x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

Quindi eseguiamo la sostituzione:

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t,$$

donde:

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t dt \\ &= \frac{3}{4}\int\cosh^2 t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t-\frac{1}{2}\right)dt \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int\cosh^2 t\sinh t dt-\frac{3}{8}\int\cosh^2 t dt \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due integrali a secondo membro:

$$\int\cosh^2 t\sinh t dt=\int\cosh^2 t d(\cosh t)=\frac{1}{3}\cosh^3 t$$

Il secondo integrale è già stato calcolato negli esercizi precedenti:

$$\int\cosh^2 t dt=\frac{1}{2}\sinh t\cosh t+\frac{t}{2}$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{\sqrt{3}}{8}\cosh^3 t - \frac{3}{16}\sinh t \cosh t - \frac{3}{16}t + C$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{arcsin h}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \ln\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right] \\ &= \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+x+1}dx = &\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+x+1)^3}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} \\ &-\frac{3}{16}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)+C \end{aligned}$$

Esercizio 931

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-4}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = 2\cosh t,$$

donde:

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t, \quad \sqrt{x^2-4} = 2\sinh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 4\int \sinh^2 t dt$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo:

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$$

Quindi

$$\begin{aligned}F(t) &= 2\int(\cosh 2t - 1)\,dt = 2\int \cosh 2t dt - 2\int dt \\ &= \sinh 2t - 2t + C \\ &= 2\sinh t\cosh t - 2t + C\end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned}t &= \operatorname{arccos h}\frac{x}{2} = \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right) - \ln 2\end{aligned}$$

Incorporando $-\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$\int \sqrt{x^2-4}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$$

Esercizio 932

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = \sinh t,$$

donde:

$$dx = \cosh t, \ \ \sqrt{x^2+1} = \cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \int \cosh^2 t dt,$$

che è già stato calcolato più volte negli esercizi precedenti:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2} + C
\end{aligned}
$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$
t = \operatorname{arcsin} \mathrm{h} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)
$$

Quindi

$$
\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)
$$

Esercizio 933

Calcolare l'integrale:

$$
\int \sqrt{x^2 + x} dx
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &= (x + k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ l + k^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, l = -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$
x + \frac{1}{2} = \cosh t,
$$

donde:

$$
dx = \frac{1}{2}\sinh t, \;\; \sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2}\sinh t
$$

L'integrale in funzione di t:

$$
F(t) = \frac{1}{4}\int \sinh^2 t dt,
$$

Esprimiamo il $\sinh^2 t$ attraverso il $\cosh 2t$:

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}\left(\cosh 2t - 1\right),$$

cosicché:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{8}\int \left(\cosh 2t - 1\right) dt \\ &= \frac{1}{16}\sinh 2t - \frac{t}{8} + C \\ &= \frac{1}{8}\sinh t \cosh t - \frac{t}{8} + C \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x.

$$\begin{aligned} \cosh t &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \sinh t &= 2\sqrt{x^2 + x} \\ t &= \operatorname{arccos h}\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \ln\left|2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{x^2 + x}\right| \\ &= \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right| - \ln 2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2 + x}dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{8}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right| + C$$

Esercizio 934

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 7 &= (x + k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ l + k^2 = -7 \end{cases} \Longrightarrow k = -3, l = -16 \\ &\Longrightarrow x^2 - 6x - 7 = (x - 3)^2 - 16 \end{aligned}$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$x - 3 = 4\cosh t,$$

donde:

$$dx = 4\sinh t, \ \ \sqrt{x^2 - 6x - 7} = 4\sinh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 16 \int \sinh^2 t dt,$$

L'integrale $\int \sinh^2 t dt$ è già stato calcolato nell'esericizio precedente, quindi:

$$F(t) = 8\sinh t \cosh t - 8t + C$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x.

$$\begin{aligned} \cosh t &= \frac{x-3}{4} \\ \sinh t &= \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x - 7} \\ t &= \operatorname{arccos h}\left(\frac{x-3}{4}\right) \\ &= \ln\left|\frac{x-3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x - 7}\right| \\ &= \ln\left|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x - 7}\right| - \ln 4 \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7} dx = \frac{x-3}{2} \int \sqrt{x^2 - 6x - 7} dx - 8\ln\left|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x - 7}\right| + C$$

Esercizio 935

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin x \sinh x dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int \sin x \sinh x dx &= \int \sin x d(\cosh x) \\ &= \sin x \cosh x - \int \cosh x \cos x dx\end{aligned}$$

$\int \cosh x \cos x dx$ può essere calcolato per parti:

$$\begin{aligned}\int \cosh x \cos x dx &= \int \cos x d(\sinh x) \\ &= \cos x \sinh x + \int \sin x \sinh x dx\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$\int \sin x \sinh x dx = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x - \int \sin x \sinh x dx,$$

che può essere risolta rispetto a $\int \sin x \sinh x dx$

$$\int \sin x \sinh x dx = \frac{1}{2} (\sin x \cosh x - \sinh x \cos x) + C$$

Esercizio 936

Calcolare l'integrale:

$$\int \left(x^2+1\right)^2 e^{2x} dx \tag{223}$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma conviene utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int \left(x^2+1\right)^2 e^{2x} dx = \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right) e^{2x} \tag{224}$$

Derivando primo e secondo membro della (231):

$$\begin{aligned}\left(x^2+1\right)^2 e^{2x} &= \left(4Ax^4 + 3Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right) e^{2x} \\ &+ 2e^{2x} \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right) \\ &= e^{2x} \left[2Ax^4 + (4A+2B)x^3 + (3B+2C)x^2 + (2C+2D)x + (D+2E)\right]\end{aligned}$$

Cioè:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2Ax^4 + (4A+2B)x^3 + (3B+2C)x^2 + (2C+2D)x + (D+2E)$$

Per il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \\ 3B + 2C = 2 \\ C + D = 0 \\ D + 2E = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{5}{2}, D = -\frac{5}{2}, E = \frac{7}{4}$$

Quindi l'integrale:

$$\int \left(x^2 + 1\right)^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4} \left(2x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 10x + 7\right) + C$$

Esercizio 937

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 \cos^2 3x dx \tag{225}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$$

cioè:

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2} (\cos 6x + 1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos^2 3x dx &= \frac{1}{2} \int x^2 (\cos 6x + 1) dx = \frac{1}{2} \left(\int x^2 \cos 6x + \int x^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int x^2 \cos 6x dx}_{F_1(x)} + \frac{1}{6} x^3 \end{aligned} \tag{226}$$

Calcoliamo a parte $F_1(x)$:

$$F_1(x) \overset{t=6x}{\rightarrow} F_1(t) = \frac{1}{216} \int t^2 \cos t dt = \frac{1}{216} \left(\int t^2 \sin t dt - 2 \int t \sin t dt \right)$$

$$\begin{aligned}\int t^2 \sin t dt &= \int t d\left(-\cos t\right) = -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t \\ \int t \sin t dt &= \int t d\left(-\cos t\right) = -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

$$F_1\left(t\right) = \frac{1}{216}\left(t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right)$$

Ripristinando x:

$$F_1\left(x\right) = \frac{1}{216}\left(36x^2\sin 6x + 12x\cos 6x - 2\sin 6x\right)$$

Sostituendo nella (233):

$$\int x^2\cos^2 3x dx = \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 6x + \frac{x}{6}\cos 6x - \frac{1}{36}\sin 6x\right) + C$$

Esercizio 938

Calcolare l'integrale:

$$\int x \sin x \cos 2x dx \tag{227}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo $\sin x \cos 2x$ con le formule di Werner:

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 3x - \sin x\right)$$

Determiniamo:

$$\begin{aligned}\int \sin x\cos 2x dx &= \frac{1}{2}\int\left(\sin 3x - \sin x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\end{aligned} \tag{228}$$

La (235) ci permette di calcolare l'integrale (234) per parti

$$\begin{aligned}\int x\sin x\cos 2x dx &= \int x d\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\right) \\ &= \frac{x}{2}\cos x - \frac{x}{6}\cos 3x - \int\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\right)dx \\ &= \frac{x}{2}\cos x - \frac{x}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{18}\sin 3x + C\end{aligned}$$

Esercizio 939

Calcolare l'integrale:

$$\int e^{2x} \sin^2 x dx \tag{229}$$

***

Soluzione
Svincoliamoci da $\sin^2 x$ attraverso la nota formula di duplicazione:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} F(x), \end{aligned} \tag{230}$$

essendo:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int e^{2x} \cos 2x dx \stackrel{t=2x}{\rightarrow} F(t) = \frac{1}{2} \int e^t \cos t dt$$

L'ultimo integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned} \int e^t \cos t dt &= \int e^t d(\sin t) = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt \\ &= e^t \sin t - \int e^t d(-\cos t) \\ &= e^t \sin t + e^t - \int e^t \cos t dt, \end{aligned}$$

risolvendo rispetto a $\int e^t \cos t dt$:

$$\int e^t \cos t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t)$$

Quindi:

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{4} (\sin 2x + \cos 2x)$$

Sostituendo nella (237):

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{8}(\sin 2x + \cos 2x)$$
$$= \frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x) + C$$

Esercizio 940

Calcolare l'integrale:

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx \tag{231}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo $\sin x \sin 3x$ con le formule di Werner:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int e^x (\cos 2x - \cos 4x)\, dx \tag{232}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int e^x \cos 2x dx - \int e^x \cos 4x dx\right)$$

Calcoliamo a parte i due integrali, procedendo per parti:

$$\int e^x \cos 2x dx = \int e^x d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{e^x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 2x dx$:

$$\int e^x \sin 2x dx = \int e^x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$
$$= -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx,$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 2xdx$:

$$\int e^x \cos 2xdx = \frac{2e^x}{5}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \tag{233}$$

Passiamo all'altro integrale:

$$\int e^x \cos 4xdx = \int e^x d\left(\frac{\sin 4x}{4}\right) = \frac{e^x}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 4xdx$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 4xdx$:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 4xdx &= \int e^x d\left(-\frac{\cos 4x}{2}\right)\\ &= -\frac{e^x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 4xdx,\end{aligned}$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 4xdx = \frac{e^x}{4}\sin 4x + \frac{e^x}{16}\cos 4x - \frac{1}{16}\int e^x \cos 4xdx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 4xdx$:

$$\int e^x \cos 2xdx = \frac{4e^x}{17}\left(\sin 4x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) \tag{234}$$

Sostituendo le (240)-(241) nella (239):

$$\int e^x \sin x \sin 3xdx = \frac{e^x}{2}\left(\frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5} - \frac{4\sin 4x + \cos 4x}{17}\right) \tag{235}$$

Esercizio 941

Calcolare l'integrale:

$$\int xe^x \cos xdx \tag{236}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int xe^x \cos xdx &= \int xe^x d(\sin x) \\ &= xe^x \sin x - \int \sin xd(xe^x)\\ &= xe^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin xdx}_{F_1(x)} - \underbrace{\int xe^x \sin xdx}_{F_2(x)}\end{aligned} \tag{237}$$

Calcoliamo a parte $F_1(x), F_2(x)$:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
&= e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - F_1(x),
\end{aligned}$$

da cui:

$$F_1(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Passiamo a $F_2(x)$:

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int e^x d(-\cos x) = -xe^x \cos x + \int \cos x (e^x + xe^x) dx \\
&= -xe^x \cos x + \int e^x \cos x dx + \int xe^x \cos x dx
\end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx$ si calcola facilmente per parti:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$$

Quindi:

$$F_2(x) = -xe^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + \int xe^x \cos x dx$$

Sostituendo $F_1(x), F_2(x)$ nella (244)

$$\int xe^x \cos x dx = xe^x(\sin x + \cos x) - e^x \cos x - \int xe^x \cos x dx,$$

da cui ricaviamo $\int xe^x \cos x dx$:

$$\int xe^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}[x(\sin x + \cos x) - \cos x] + C$$

Esercizio 942

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} \tag{238}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} \\ &= \int \frac{e^x dx}{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x} \end{aligned}$$

Poniamo $y = e^x$, per cui:

$$e^x dx = dy$$

L'integrale in funzione di y:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int \frac{y dy}{y^3 + y^2 - 2y} \\ &= \int \frac{dy}{y(y^2 + y - 2)} \\ &= \int \frac{dy}{y(y-1)(y+2)} \end{aligned}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trascendente all'integrale di una funzione razionale regolare, quindi integriamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y-1)(y+2)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+2} \\ &= \frac{A(y^2 + y - 2) + By(y+2) + Cy}{y(y-1)(y+2)} \\ &= \frac{(A + B + C)y^2 + (A + 2B - C)y + 2A}{y(y-1)(y+2)} \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 2B - C = 0 \\ 2A = -1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{6}$$

Quindi:

$$F(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{3}\ln|y-1| + \frac{1}{6}\ln|y+2| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln|e^x - 1| + \frac{1}{6}\ln(e^x + 6) + C$$

Esercizio 943

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}} \tag{239}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}} \\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}}} \end{aligned}$$

Poniamo $y = e^{-x}$, per cui:

$$e^{-x}dx = -dy$$

L'integrale in funzione di y:

$$F(y) = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+1}}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trascendente all'integrale di una funzione irrazionale. In particolare si tratta di un integrale contenente un trinomio semplice, che si calcola facendo comparire la somma o la differenza di due quadrati. Scriviamo:

$$\begin{aligned} y^2+y+1 &= (y+k)^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\ &= -\ln\left|\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right| + C_1 \\ &= -\ln\left|2y+2\sqrt{y^2+y+1}\right| + \underbrace{C_1+\ln 3}_{=C} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} = -\ln\left|2e^{-x}+1+2\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\right|+C$$
$$= -\ln\left|e^{-x}\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)\right|+C$$
$$= x-\ln\left|2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right|+C$$

Esercizio 944

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx \tag{240}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\int x^3 d\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

Calcoliamo:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{2}{1-x^2},$$

per cui:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{x^3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$$

Risulta:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)},$$

onde:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

Finalmente l'integrale:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{3}\left[x^3\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left|1-x^2\right| + x^2\right] + C$$

Esercizio 945

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9} \tag{241}$$

***

Soluzione
Trattandosi dell'integrale contenente un trinomio di secondo grado, applichiamo il procedimento standard:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 9 &= 2\left(x + k\right)^2 + l \\ &= 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ l + 2k^2 = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ l = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi:

$$2x^2 - 4x + 9 = 2\left(x - 1\right)^2 + 7 = 7\left\{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x - 1\right)\right]^2\right\},$$

cosicchè l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9} &= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x - 1\right)\right]^2} \\ &= \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\int \frac{d\left[\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x - 1\right)\right]}{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x - 1\right)\right]^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\left[\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x - 1\right)\right] + C \end{aligned}$$

Esercizio 946

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x - 5}{x^2 - 2x + 2}dx \tag{242}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x-5 &= a\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+2\right)+b \\ &= a\left(2x-2\right)+b \\ &\Longrightarrow a=\frac{1}{2}, b=-4 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2} - 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) - 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2} \end{aligned} \tag{243}$$

A secondo membro troviamo l'integrale contenente un trinomio di secondo grado; applichiamo quindi il procedimento standard:

$$x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d\left(x-1\right)}{1+(x-1)^2} = \arctan\left(x-1\right)$$

Sostituendo nella (250):

$$\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx = \ln\sqrt{x^2-2x+2} - 4\arctan\left(x-1\right)+C$$

Esercizio 947

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2+5\right)} \tag{244}$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale regolare, per cui procediamo per decomposizione in frazioni semplici

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\left(x^2+5\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5} \\ &= \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+5A}{x\left(x^2+5\right)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)\,x^2 + Cx + 5A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 5A=1 \end{cases},$$

ottenendo:

$$A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = 0$$

Ora possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\,(x^2+5)} &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{x^2+5} \\ &= \frac{1}{5}\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)\right] + C \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+5}} + C \end{aligned}$$

Esercizio 948

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\,(x+3)^2} \tag{245}$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale regolare, per cui procediamo per decomposizione in frazioni semplici

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)^2\,(x+3)^2} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2\,(x+3)^2} \cdot [(A_1+B_1)\,x^3 + \\ &+ (8A_1 + A_2 + 7B_1 + B_2)\,x^2 + (21A_1 + 6A_2 + 16B_1 + 4B_1)\,x \\ &+ (18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 4B_2)] \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 8A_1 + A_2 + 7B_1 + B_2 = 0 \\ 21A_1 + 6A_2 + 16B_1 + 4B_1 = 0 \\ 18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 4B_2 = 1 \end{cases},$$

ottenendo:

$$A_1 = -2, A_2 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1$$

Ora possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)^2 (x+3)^2} &= -2 \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{dx}{(x+3)^2} \\ &= 2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 949

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx \tag{246}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo il numeratore:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx &= \int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x^3} dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int x^{-5/2} dx + \int x^{-3} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 950

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \tag{247}$$

***

Soluzione
Esprimiamo il trinomio come somma di due quadrati:

$$\begin{aligned}
x^2 + x + 1 &= (x+k)^2 + l \\
&= x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ l + k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{4} \\
&\Longrightarrow x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \ln\left|\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x+1}\right| + \underbrace{C_1 - \ln\sqrt{3}}_{=C} \\
&= \ln\left|2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x+1}\right| + C
\end{aligned}$$

Esercizio 951

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} \tag{248}$$

***

Soluzione
Quest'integrale è del tipo:

$$\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} = \int \mathcal{R}\left[(2x)^{1/2}, (2x)^{1/3}\right] dx,$$

dove $\mathcal{R}$ è una funzione razionale. Il cambio di variabile è $2x = t^6$, per cui:

$$\sqrt{2x} = t^3, \ \sqrt[3]{2x} = t^2$$
$$x = \frac{1}{2}t^6, \ dx = 3t^5 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 3\int t^2\left(1-t^2\right)dt \\ &= 3\left(\int t^2 dt - \int t^4 dt\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} &= 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{2x} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{(2x)^6}\right) + C \\ &= \sqrt{2x} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^6} + C \end{aligned}$$

Esercizio 952

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} \tag{249}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} &= \int \frac{dx}{\left[\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2\right]} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2} \end{aligned}$$

Eseguaimo il cambio di variabile $t = \sqrt[3]{x}$, per cui:

$$dt = \frac{1}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{3}{t+1} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$$

Esercizio 953

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}} \tag{250}$$

***

Soluzione
L'integrale è del tipo

$$\int \mathcal{R}\left[(5-x)^{1/4}, (5-x)^{1/2}\right] dx$$

Quindi il cambio di variabile è $5 - x = t^4$, onde:

$$dx = -4t^3 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= -4\int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= -4\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= -4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5+x}} &= -4\left(\frac{1}{2}\sqrt{5-x} - \sqrt[4]{5-x} + \ln\left|\sqrt[4]{5-x} + 1\right|\right) + C \\ &= 4\sqrt[4]{5-x} - 2\sqrt{5-x} - \ln\left|\sqrt[4]{5-x} + 1\right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 954

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2 - 9}dx \tag{251}$$

***

Soluzione
Ci conviene eseguire una sostituzione iperbolica, ponendo: $x = 3\cosh t$, per cui:

$$dx = 3\sinh t, \; x^2 - 9 = 9\sinh^2 t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 9\int \sinh^2 t dt$$

Dalla formula di duplicazione del coseno iperbolico:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\sinh^2 t &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1) \\
F(t) &= \frac{9}{2}\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t - t\right) + C' \\
&= \frac{9}{2}(\sinh t \cosh t - t) + C'
\end{aligned}$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\begin{aligned}
\cosh t &= \frac{x}{3}, \\
\sinh t &= \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9} \\
t &= \operatorname{arccos h}\frac{x}{3} = \ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}\right| = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 9}\right| - \ln 3,
\end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int \sqrt{x^2 - 9}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 9}\right| + \underbrace{C' - \ln 3}_{=C}$$

Esercizio 955

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2 - 4x} dx \tag{252}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -4\left(x^2 + 2kx + k^2\right) + l \\ &= -4x^2 - 8kx - 2 - 4k^2 + l \\ &= -4\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16} \\ &= -4\left[\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Ci conviene eseguire una sostituzione trignometrica, ponendo: $x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\sin t$, per cui:

$$dx = \frac{1}{8}\cos t, \ \sqrt{\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}\cos t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \frac{1}{32}\int \cos^2 t dt$$

Dalla formula di duplicazione del coseno

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1,$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= \frac{1}{2}(\cos 2t - 1) \\ F(t) &= \frac{1}{64}\int (\cos 2t - 1)\, dt \\ &= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\right) + C \\ &= \frac{1}{64}(\sin t \cos t - t) + C \end{aligned}$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\begin{aligned}
\sin t &= 8\left(x-\frac{1}{8}\right) = 8x-1, \\
\cos t &= 4\sqrt{x-4x^2} \\
t &= \arcsin\left(8x-1\right),
\end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int \sqrt{x^2-4x}dx = \frac{1}{64}\left[4\left(8x-1\right)\sqrt{x-4x^2}-\arcsin\left(8x-1\right)\right]+C$$

Esercizio 956

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \tag{253}$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione $x = 1/t$, per cui:

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F\left(t\right) &= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}
\end{aligned}$$

Scriviamo:

$$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\
&= -\int \frac{d\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\
&= -\ln\left|\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{t^2+t+1}\right|+C' \\
&= -\ln\left|2t+1+2\sqrt{t^2+t+1}\right|+\underbrace{C'-\sqrt{3}}_{=C}
\end{aligned}
$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= -\ln\left|\frac{2}{x}+1+\frac{2}{x}\sqrt{x^2+x+1}\right|+C \\
&= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C \\
&= \ln\left|\frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 957

Calcolare l'integrale:

$$
\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx \tag{254}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
x^2+2x+2=(x+1)^2+1,
$$

quindi:

$$
\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx=\int x\sqrt{(x+1)^2+1}dx
$$

Eseguiamo la sostituzione iperbolica $x+1=\sinh t$, per cui:

$$
dx=\cosh t dt, \quad \sqrt{(x+1)^2+1}=\cosh t
$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (\sinh t - 1)\cosh^2 t dt \\ &= \int \sinh t \cosh^2 t dt - \int \cosh^2 t \\ &= \frac{1}{3}\int \cosh^2 t d(\cosh) - \int \cosh^2 t \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato negli esercizi precedenti:

$$\int \cosh^2 t = \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2},$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\begin{aligned} t = \operatorname{arcsin h}(x+1) = \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| \\ \sinh t = x + 1 \\ \cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 + 2x + 2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^3} - \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2} \\ - \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 958

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx \tag{255}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Utilizziamo note formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Longrightarrow \frac{1}{\cos^4 x} = \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \tan^2 x \left(1 + \tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\
&= \int \tan^2 x d\left(\tan x\right) + \int \tan^4 x dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 959

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^4 x dx \tag{256}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

per ricavare $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 1\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}\int \left(\cos 2x + 1\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1\right) dx \\
&= \frac{1}{4}F\left(x\right) + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + C,
\end{aligned} \tag{257}$$

essendo:

$$F\left(x\right) \stackrel{def}{=} \int \cos^2 2x dx$$

Poniamo $t = 2x$

$$\begin{aligned}
F\left(t\right) &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \left(\cos 2t + 1\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{t}{4} + C_1
\end{aligned}$$

Ripristinando x:

$$F(x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}x + C_1$$

Sostituendo nella (264):

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C \\ &= \frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C\end{aligned}$$

Esercizio 960

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)dx \tag{258}$$

***

Soluzione
Utilizziamo rispettivamente le formule di sottrazione e di addizione:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \cos^2 x dx - \int \sin^2 x dx\right)\end{aligned} \tag{259}$$

Calcoliamo a parte i due integrali a secondo membro:

$$\begin{aligned}\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) &\Longrightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1) &\Longrightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin 2x)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x - x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C \\ &= \frac{\sin 2x}{8} + C\end{aligned}$$

Esercizio 961

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} \tag{260}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} &= \int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\ &= -\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} d(\cot x)\end{aligned}$$

Utilizziamo ora le formule:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \frac{1}{\cot^2 x} \Longrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x} \\ \frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \cot^2 x \Longrightarrow \frac{1}{\sin^3 x} = \left(1+\cot^2 x\right)^{3/2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} = -\int \frac{(1+\cot^2 x)}{\cot x} d(\cot x)$$

Ponendo $t = \cot x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned}F(t) &= -\int \frac{(1+t^2)^2}{t} dt \\ &= -\int \left(t^3 + 2t + \frac{1}{t}\right) dt \\ &= -\left(\frac{1}{4}t^4 + t^2 + \ln|t|\right) + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} = \ln|\tan x| - \frac{\cot^4 x}{4} - \cot^2 x + C$$

Esercizio 962

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx \tag{261}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx = -\int \left(1+\sqrt{\cot x}\right) d\left(\cot x\right)$$

Ponendo $t = \cot x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F\left(t\right) &= -\int \left(1+\sqrt{t}\right) dt \\ &= -\left(t+\frac{2}{3}t^{3/2}\right)+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx = -\left(\cot x+\frac{2}{3}\sqrt{\cot^3 x}\right)+C$$

Esercizio 963

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx \tag{262}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx &= -\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}d\left(\cos x\right) \\ &= \int \frac{\cos^2 x-1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}d\left(\cos x\right) \end{aligned}$$

Ponendo $t = \cos x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{t^2 - 1}{\sqrt[5]{t^3}} dt \\ &= \int \left(t^{7/5} - t^{-3/5}\right) dt \\ &= \frac{5}{12} t^{12/5} - \frac{5}{2} t^{2/5} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx &= \frac{5}{12} \left(\cos^2 x \sqrt[5]{\cos^2 x} - 6\sqrt[5]{\cos^2 x}\right) + C \\ &= \frac{5}{12} \sqrt[5]{\cos^2 x} \left(\cos^2 x - 6\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 964

Calcolare l'integrale:

$$\int \tan^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx \tag{263}$$

***

Soluzione
Ponendo $t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = 2 \int \tan^3 t dt$$

Dalla nota formula:

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t,$$

ricaviamo:

$$\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1,$$

per cui l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \int \tan t \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt \\ &= 2 \int \tan t \underbrace{\frac{dt}{\cos^2 t}}_{=d(\tan t)} + 2 \int \underbrace{\tan t dt}_{=\frac{d(-\cos t)}{\cos t}} \\ &= \tan^2 t + 2 \ln|\cos t| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx = \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Esercizio 965

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx \tag{264}$$

***

Soluzione
Ponendo $t=\sqrt{1-x}$, segue:

$$dx = -\frac{2dx}{\sqrt{1-x}},$$

mentre l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -2\int \sinh t dt \\ &= -2\cosh t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\cosh\sqrt{1-x} + C$$

Esercizio 966

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} \tag{265}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} = -\int \frac{\cot x}{1+\cot x}d(\cot x),$$

giacché

$$d(\cot x) = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Ponendo $t=\sqrt{1-x}$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -2\int \frac{t}{t+1}dt \\ &= -\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = -\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= -\left(t-\ln|t+1|\right)+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} = \ln|\cot x+1| - \cot x + C$$

Esercizio 967

Calcolare l'integrale:

$$\int xe^{2x}dx \tag{266}$$

***

Soluzione
Si potrebbe eseguire un'integrazione per parti, ma preferiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int xe^{2x}dx = (Ax+B)\,e^{2x}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x:

$$xe^{2x} = Ae^{2x} + 2\,(Ax+B)\,e^{2x},$$

cioè:

$$x = 2Ax + (A+2B)$$

Il pincipio di identità dei polinomi implica:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ A+2B \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{4}$$

Quindi l'integrale:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{4}\,(2x-1)+C$$

Esercizio 968

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 e^{x^3} dx \tag{267}$$

***

Soluzione
L'integrazione è immediata:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d\left(x^3\right) = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Esercizio 969

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x \sin^2 x dx \tag{268}$$
$$\int x \sin x^2 dx$$

***

Soluzione
Per calcolare il primo integrale svincoliamoci innanzitutto da $\sin^2 x$, utilizzando la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned} \int x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \left(\int x dx - \int x \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - F(x) \right), \end{aligned} \tag{269}$$

essendo:

$$F(x) = \int x \cos 2x dx$$

Integrando per parti:

$$F(x) = \int x d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

Sostituendo nella (276):

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8} + C$$

Passiamo ora al secondo integrale, "visualmente" simile al primo ma ovviamente diverso, il cui calcolo è immediato:

$$\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

Esercizio 970

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx \tag{270}$$

***

Soluzione

Innanzitutto poniamo $t = \frac{x}{2}$, per cui l'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 2\int \sin^2 t\cos 3tdt = 2\int \sin t\sin t\cos 3tdt$$

Applichiamo le formule di Werner:

$$\sin t\cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 4t - \sin 2t),$$

perciò:

$$F(t) = \int \sin t\sin 4tdt - \int \sin t\sin 2tdt$$

Calcoliamo a parte i due integrali espandendo l'integrando con le formule di Werner

$$\begin{aligned}
\int \sin t\sin 4tdt &= \frac{1}{2}\int (\cos 3t - \cos 5t)\,dt \\
&= \frac{1}{6}\sin 3t - \frac{1}{10}\sin 5t \\
\int \sin t\sin 2tdt &= 2\int \sin^2 t\cos tdt \\
&= 2\int \sin^2 td(\sin t) \\
&= \frac{2}{3}\sin^2 t
\end{aligned}$$

Quindi:
$$F(t) = \frac{1}{6}\sin 3t - \frac{1}{10}\sin 5t - \frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2} + C$$
Ripristinando la variabile x:
$$\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx = \frac{1}{6}\sin\frac{3x}{2} - \frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2} + C$$

Esercizio 971

Calcolare il seguente integrale:
$$\int x^2 \ln\sqrt{1-x}dx \tag{271}$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti assumendo come termine finito $\ln\sqrt{1-x}$:
$$\int \ln\sqrt{1-x}d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} + \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x-1}dx \tag{272}$$
Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:
$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{x-1}dx &= \int\frac{x^3-1+1}{x-1}dx = \\ &= \int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \int\left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right]dx \\ &= \int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C_1\end{aligned}$$
Sostituendo nella (279):
$$\int x^2\ln\sqrt{1-x}dx = \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^2}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + C$$

Esercizio 972

Calcolare il seguente integrale:
$$\int\frac{2^x dx}{1-4^x} \tag{273}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 2^x$, per cui:

$$\begin{aligned} & dt = 2^x \ln 2 dx \Longrightarrow 2^x dx = \frac{dt}{\ln 2} \\ & 4^x = t^2 \end{aligned}$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2 \ln 2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x dx}{1 - 4^x} &= \frac{1}{2 \ln 2} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + C \\ &= \frac{1}{\ln 4} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + C \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{\left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right|} + C \end{aligned}$$

Esercizio 973

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} \tag{274}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^x - 2^x}$$

Ponendo $t = e^{-x}$

$$e^{-x} dx = -dt,$$

mentre l'integrale in funzione di t si scrive:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\int \frac{dt}{\frac{1}{t}-2} \\
&= -\int \frac{tdt}{1-2t} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-2t-1}{1-2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1-2t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(t+\frac{1}{2}\ln|1-2t|\right)+C
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^{x}} = \frac{e^{-x}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1-2e^{-x}\right|+C
$$

Osserviamo che $\ln|1-2e^{-x}| = \ln\frac{|e^{x}-2|}{e^{x}} = \ln|e^{x}-2|-x$, per cui:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^{x}} &= \frac{1}{2e^{x}}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln|e^{x}-2|+C \\
&= \frac{2-xe^{x}+e^{x}\ln|e^{x}-2|}{4e^{x}}+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 974

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \left(x^2-1\right)a^{-2x}dx, \qquad (a>0,\, a\neq 1) \tag{275}
$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$
\int \left(x^2-1\right)a^{-2x}dx = \int x^2a^{-2x}dx-\int a^{-2x}dx \tag{276}
$$

Il secondo integrale a secondo membro della (283) è immediato:

$$
\int a^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int a^{-2x}d(-2x) = -\frac{a^{-2x}}{2\ln a}
$$

Il primo integrale può essere calcolato con il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$
\int x^2a^{-2x}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)a^{-2x}
$$

Derivando primo e secondo membro:

$$x^2 a^{-2x} = (2Ax + B)\, a^{-2x} - 2 \ln a \left(Ax^2 + Bx + C\right) a^{-2x},$$

da cui:

$$x^2 = (-2A \ln a)\, x^2 + 2\,(2A - B \ln a) + B - 2C \ln a$$

Per il principio di identità dei polinomi i coefficienti A, B, C devono soddisfare il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -2A \ln a = 1 \\ A = B \ln a \\ B = 2C \ln a \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$A = -\frac{1}{2 \ln a},\ B = -\frac{1}{2 \ln^2 a}, C = -\frac{1}{4 \ln^3 a}$$

Quindi:

$$\int x^2 a^{-2x} dx = -\frac{x^2 a^{-2x}}{2 \ln a} - \frac{x a^{-2x}}{2 \ln^2 a} - \frac{a^{-2x}}{4 \ln^3 a}$$

Sostituendo nella (283):

$$\int \left(x^2 - 1\right) a^{-2x} dx = -\frac{a^{-2x}}{2 \ln a} \left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln a} + \frac{1}{2 \ln^2 a}\right) + C$$

Esercizio 975

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{e^x + 1} dx \tag{277}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{e^x + 1}$, per cui:

$$dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{\sqrt{e^x + 1}} dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt \\
&= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt \\
&= 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt \\
&= 2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\int \sqrt{e^x+1}dx = 2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C
$$

Esercizio 976

Calcolare il seguente integrale:

$$
F(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \tag{278}
$$

***

Soluzione
Applichiamo il procedimento standard degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente, scriviamo:

$$
x = a(10x-2)+b = 10ax-2a+b,
$$

onde:

$$
a = \frac{1}{10}, b = \frac{1}{5}
$$

L'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} &= \frac{1}{10}\int \frac{d(5x^2-2x+1)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}+\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5}F_1(x),
\end{aligned} \tag{279}
$$

essendo:

$$
F_1(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}
$$

Per calcolare $F_1(x)$ scriviamo:

$$\begin{aligned}
5x^2-2x+1 &= 5\left(x+k\right)^2+l\\
&= 5\left(x^2+2kx+k^2\right)+l\\
&= 5x^2+10kx+5k^2+l\\
&\Longrightarrow \begin{cases} 10k=-2 \\ l+5k^2=1 \end{cases} \Longrightarrow k=-\frac{1}{5},\ l=\frac{4}{5},
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
5x^2-2x+1 &= \frac{4}{5}\left[1+\left(\frac{5x-1}{2}\right)^2\right]\\
F_1\left(x\right) &= \frac{\sqrt{5}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{5x-1}{2}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Poniamo $t=\frac{5x-1}{2}$:

$$F_1\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C_1$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
F_1\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5x-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2+C_1
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (286) e incorporando $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C$$

Esercizio 977

Calcolare il seguente integrale:

$$F\left(x\right)=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx \tag{280}$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti, assumendo come fattore finito $\arctan x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}dx &= \int \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro, procedendo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\\ &= \frac{(A+B)\,x^2 + Cx + A}{x\left(1+x^2\right)},\end{aligned}$$

cioè:

$$1 = (A+B)\,x^2 + Cx + A$$

Il principio di identità dei polinomi implica il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$A = 1, B = -1, C = 0,$$

donde:

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)} &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Esercizio 978

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \cosh(\ln x)\,dx \tag{281}$$

***

Soluzione
Esplicitiamo il coseno iperbolico:

$$\begin{aligned}\int \cosh(\ln x)\,dx &= \int \frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{2}dx \\ &= \int \frac{x+\frac{1}{x}}{2}dx \\ &= \frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x + C\end{aligned}$$

Esercizio 979

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \left(x^2-3x\right)\sin 5x dx \tag{282}$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma conviene utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-3x\right)\sin 5x dx &= \left(Ax^2+Bx+C\right)\sin 5x \\ &+ \left(Dx^2+Ex+F\right)\cos 5x\end{aligned}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\left(x^2-3x\right)\sin 5x dx &= (2Ax+B)\sin 5x + 5\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 5x+ \\ &+ (2Dx+E)\cos 5x - 5\left(Dx^2+Ex+F\right)\sin 5x \\ &= \left[-5Dx^2+(2A-5E)\,x+(B-5D)\right]\sin 5x+ \\ &+ \left[5Ax^2+(5B+2D)\,x+(5C+E)\right]\cos 5x,\end{aligned}$$

da cui otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -5D = 1 \\ 2A - 5E = -3 \\ B - 5F = 0 \\ 5A = 0 \\ 5B + 2D = 0 \\ 5C + E = 0 \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$D = -\frac{1}{5}, E = \frac{3}{5}, C = -\frac{3}{25}, B = \frac{2}{25}, F = \frac{2}{2 \cdot 25}, A = 0$$

Quindi:

$$\int \left(x^2 - 3x\right) \sin 5x dx = \frac{1}{25}\left[(x-3)\sin 5x - \left(5x^2 - 15x - \frac{2}{5}\right)\cos 5x\right] + C$$

Esercizio 980

Calcolare il seguente integrale:

$$\int |x|\, dx \tag{283}$$

***

Soluzione

Poniamo per definizione

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int |x|\, dx$$

Per una nota proprietà del valore assoluto, abbiamo:

$$\begin{aligned} F(x \geq 0) \underset{|x|=x}{=} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \\ F(x < 0) \underset{|x|=-x}{=} -\int x dx = -\frac{1}{2}x^2 + C, \end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \end{cases},$$

che può essere scritto in un'unica formula:

$$\int |x|\, dx = \frac{1}{2}|x|\, x + C$$

Esercizio 981

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} \tag{284}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = e^x$, per cui

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 13}$$

Il cambio di variabile ha ridotto l'integrale di una funzione trascendente nell'integrale di una funzione razionale. Precisamente, di una funzione contente un trinomio di secondo grado, onde applichiamo il procedimento standard per questi casi.

$$\begin{aligned}
t^2 - 6t + 1 &= (t + k)^2 + l \\
&= t^2 + 2kt + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k = -6 \\ k^2 + l = 13 \end{array} \right. \Longrightarrow k = -3,\, l = 4
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
t^2 - 6t + 1 &= (t - 3)^2 + 4 \\
&= 4 \left[1 + \left(\frac{t-3}{2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

L'integrale $F(t)$ diventa:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{t-3}{2}\right)}{1 + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{t-3}{2} \right) + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile :

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{e^x - 3}{2} \right) + C$$

Esercizio 982

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \cos x \cosh x dx \tag{285}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int \cos x \cosh x dx &= \int \cos x d(\sinh x) \\ &= \cos x \sinh x + \int \sinh x \sin x dx\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro, integriamo nuovamente per parti:

$$\begin{aligned}\int \sinh x \sin x dx &= \int \sin x d(\cosh x) \\ &= \sin x \cosh x - \int \cosh x \cos x dx\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \cos x \cosh x dx = \cos x \sinh x + \cosh x \sin x + \int \cosh x \cos x dx$$

da cui possiamo ricavare $\int \cosh x \cos x dx$, ottenendo

$$\int \cosh x \cos x dx = \frac{1}{2} (\cos x \sinh x + \cosh x \sin x) + C$$

Esercizio 983

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \tag{286}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\
&= - \int \frac{d \left(\cos \frac{x}{2} \right)}{\cos \frac{x}{2}} + \int \frac{d \left(\sin \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} \\
&= - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| + C \\
&= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 984

Calcolare i seguenti integrali

$$
\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}
$$

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}
$$

***

Soluzione
Il primo si calcola immediatamente:

$$
\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C
$$

Per il secondo scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x - x^2 &= -(x+k)^2 + l \\
&= -x^2 - 2kx - k^2 + l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k = -1 \\ l - k^2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}, \, l = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
x - x^2 = \frac{1}{4} \left[1 - (2x-1)^2 \right]
$$

L'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\
&= \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\
&= \arcsin(2x-1) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 985

Calcolare il seguente integrale

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x+x^2 &= (x+k)^2 + l \\
&= x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k = 1 \\ k^2 + l = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow k = \frac{1}{2},\, l = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
x+x^2 = \frac{1}{4}\left[(2x+1)^2 + 1\right]
$$

L'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} &= 2\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} \\
&= \int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} \\
&= \ln\left[2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right] + C \\
&= \ln\left[2x+1+2\sqrt{x+x^2}\right] + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 989

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{1-e^{4x}}e^x dx$$

Quindi poniamo $t = e^x$, per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \int \frac{t^2}{1-t^4}dt$$

Integriamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{1-t^4} &= \frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \\
&= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\
&= \frac{A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \\
&= \frac{(A-B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + (A-B+C)t + (A+B+D)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}
\end{aligned}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A-B-C=0 \\ A+B-D=1 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

onde:

$$\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{1-t^4}dt &= \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|1-t^2\right| - \frac{1}{2}\arctan t + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx = \frac{1}{4}\ln\left|1-e^{2x}\right| - \frac{1}{2}\arctan e^x + C$$

Esercizio 990

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx &= \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{1-n}x^{1-n}\right) \\ &= \frac{1}{1-n}x^{1-n}\ln^2 x - 2\cdot\frac{1}{1-n}\int x^{1-n}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln^2 x - \frac{2}{1-n}\int x^{-n}\ln x dx\end{aligned}$$

Eseguiamo un'ulteriore integrazione per parti sull'integrale:

$$\begin{aligned}\int x^{-n}\ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^{-n}+1}{-n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1-n}x^{1-n}\ln x - \frac{1}{1-n}\int x^{-n}dx \\ &= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln^2 x - \frac{2x^{1-n}}{(1-n)^2}\ln x - \frac{2}{(1-n)^3}x^{1-n} + C$$

Esercizio 991

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \left(x^2+x+1\right) e^{2x} dx$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma è preferibile utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int \left(x^2+x+1\right) e^{2x} dx = \left(Ax^2+Bx+C\right) e^{2x} + \text{const}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned} \left(x^2+x+1\right) e^{2x} &= (2Ax+B)\, e^{2x} + 2\left(Ax^2+Bx+C\right) e^{2x} \\ &= e^{2x}\left[2Ax + (2A+2B)\, x + 2C + B\right] \end{aligned}$$

Cioè:

$$x^2+x+1 = 2Ax + (2A+2B)\, x + 2C + B$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \\ 2C + B = 1 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int \left(x^2+x+1\right) e^{2x} dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) e^{2x} + \text{const}$$

Esercizio 992

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2+e^{-x}} dx$$

***

Soluzione
A numeratore della funzione integranda mettiamo in evidenza e^{-x}:

$$\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2+e^{-x}}dx=\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2e^{x}+1}e^{x}dx$$

Quindi poniamo $t=e^{x}$, per cui:

$$e^{x}dx=dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F\left(t\right) &= \int \frac{t^{2}-t}{2t+1}dt \\ &= \int \left(-\frac{3}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}\frac{1}{1+2t}\right)dt \\ &= -\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}t^{2}+\frac{3}{8}\ln\left|1+2t\right|+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2+e^{-x}}dx=\frac{3}{8}\ln\left|1+2e^{x}\right|+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{3}{4}e^{x}$$

Esercizio 993

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx$$

***

Soluzione
Dobbiamo esplicitare le funzioni iperboliche che compaiono nell'integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx &= \int \frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+1}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{e^{x}+e^{-x}-2}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{e^{-x}\left(e^{2x}+1-2e^{x}\right)}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{\left(e^{2x}+1-2e^{x}\right)}e^{x}dx \end{aligned}$$

Poniamo $t=e^{x}$, per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} dt$$

Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} &= \frac{A}{t} + \frac{B_1}{t-1} + \frac{B_2}{(t-1)^2} \\
&= \frac{A(t-1)^2 + B_1 t(t-1) + B_2 t}{t(t-1)^2} \\
&= \frac{(A + B_1) t^2 + (B_2 - B_1 - 2A) t + A}{t(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Cioè:

$$t^2 + 2t - 1 = (A + B_1) t^2 + (B_2 - B_1 - 2A) t + A$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B_1 = 1 \\ -2A + B_2 - B_1 = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$A = -1, B_1 = 2, B_2 = 2$$

Quindi:

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} = \frac{2}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{t}$$

Integrando:

$$F(t) = 2 \ln |t - 1| - \frac{2}{t-1} - \ln |t| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x - 1} dx = \ln (e^x - 1)^2 - x - \frac{2}{e^x - 1} + C$$

Esercizio 994

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2 - \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}}{x + 4\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}} dx \tag{287}$$

***

Soluzione
È un integrale del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left[x, \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/3}, \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/2}\right],$$

dove $\mathcal{R}$ denota una funzione razionale. Il cambio di variabile è:

$$t = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/2} \tag{288}$$

Risolviamo la (295) rispetto a x:

$$x = \frac{t^6+1}{t^6-1}$$

Differenziando:

$$dx = -\frac{18t^5}{\left(t^6-2\right)^2}$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= -\int \frac{2-t^2}{\frac{t^6+1}{t^6-1} + 4t^3} \frac{18t^5}{\left(t^6-2\right)^2} dt \\
&= 18 \int \frac{t^7 - 2t^5}{\left(t^6-2\right)\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)}
\end{aligned}$$

La funzione integranda si decompone in:

$$\frac{t^7 - 2t^5}{\left(t^6-2\right)\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)} = \frac{8t^8 + 2t^5 - 8t^4 + t}{3\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)} - \frac{2\left(t^5 - t\right)}{3\left(t^6-2\right)},$$

per cui:

$$\begin{aligned}
F(t) &= 18\left[\int \frac{8t^8 + 2t^5 - 8t^4 + t}{3\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)} dt - \frac{2}{3}\int \frac{t^5 - t}{t^6 - 2} dt\right] \\
&= 18 \int \frac{8t^8 + 2t^5 - 8t^4 + t}{3\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)} dt + \frac{1}{36}[-2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1+\sqrt[3]{4}t^2}{\sqrt{3}}\right) \\
&+ 2\sqrt[3]{2}\ln\left|-2 + \sqrt[3]{4}t^2\right| - \sqrt[3]{2}\ln\left|2 + \sqrt[3]{2}t^2 + \sqrt[3]{2}t^4\right| - 4\ln\left|t^6 - 2\right|] + C
\end{aligned}$$

L'integrale

$$\int \frac{8t^8 + 2t^5 - 8t^4 + t}{3\left(4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1\right)} dt$$

non è esprimibile in forma chiusa, per cui non è possibile espslicitare la primitiva della funzione proposta.

Esercizio 995

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} \tag{289}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x &= a\left(2x + 4\right) + b \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}, \end{aligned}$$

per cui:

$$x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x^2 + 4x + 2\right) - 2$$

Perciò l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 + 4x + 2\right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} \\ &= \sqrt{x^2 + 4x + 2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}} \end{aligned} \tag{290}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro, scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &= x^2 + 4x + 4 - 2 \\ &= (x + 2)^2 - 2 \\ &= 2\left[\left(\frac{x + 2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}} \\
&= \int \frac{d\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}} \\
&= \ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}\right) \\
&= \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

Sostituendo nella (297) ed incorporando $-\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$
\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+2}} = \sqrt{x^2+4x+2} - 2\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right) + C
$$

Esercizio 996

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}dx \tag{291}
$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$
\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx
$$

Qui è:

$$
m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{4}
$$

Risulta:

$$
\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z},
$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$
1 + x^{2/3} = t^4
$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^4 - 1\right)^{3/2}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = 6\left(t^4 - 1\right)^{1/2} dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \left(t^4 - 1\right)^{1/2} t \cdot 6t^3 \left(t^4 - 1\right)^{1/2} dt \\ &= 6 \int \left(t^8 - t^4\right) dt \\ &= \frac{2}{3} t^9 - \frac{6}{5} t^5 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \frac{2}{3} \sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^9} - \frac{6}{5} \sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^5} + C$$

Esercizio 997

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{292}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z},$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$1 + x^{1/4} = t^3$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 12 \int t^3 \left(t^3 - 1\right) dt \\ &= 12 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt\right) \\ &= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \frac{12}{7} \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^7} - 3 \sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C$$

Esercizio 998

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^{-3} \left(1 + x^4\right)^{1/2} dx \tag{293}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m = -3, n = 4, p = \frac{1}{2}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n} + p = 0,$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$x^{-4} + 1 = t^2$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^2 - 1\right)^{-1/4}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = -\frac{1}{2}t\left(t^2 - 1\right)^{-5/4}dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int \left(t^2 - 1\right)^{3/4} t\left(t^2 - 1\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t\left(t^2 - 1\right)^{-5/4} dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2 - 1}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(t + \int \frac{dt}{t^2 - 1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x^{-4} + 1} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^{-4} + 1} + 1}{\sqrt{x^{-4} + 1} - 1}} + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1 + x^4} + x^2}{\sqrt{1 + x^4} - x^2}\right| - \frac{\sqrt{1 + x^4}}{2x^2} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 999

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx \qquad (294)$$

***

Soluzione

Eseguiamo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx &= x\ln\left(x^2 + 1\right) - \int x d\left[\ln\left(x^2 + 1\right)\right] \qquad (295) \\
&= x\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= x - \arctan x + C_1$$

Sostituendo nella (302):

$$\int \ln\left(x^2+1\right) dx = x \ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan x + C$$

Esercizio 1000

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \tag{296}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, per cui

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int \arcsin t dt = 2\left(t \arcsin t - \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\ &= 2\left[t \arcsin t + \frac{1}{2}\int \left(1-t^2\right)^{-1/2} d\left(1-t^2\right)\right] \\ &= 2\left(t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right) + C$$

Esercizio 1001

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx \tag{297}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int x d\left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \tag{298}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{xdx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

Ponendo $\sqrt{x} = t$ si ha:

$$\begin{aligned}F(t) = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\ &= 2\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 2\,(t-\arctan t)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = 2\left(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}\right) + C$$

Sostituendo nella (305):

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

Esercizio 1002

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{299}$$

***

Soluzione
Osserviamo che:

$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi possiamo integrare per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \arcsin x d\left(-\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx \\ &= x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C\end{aligned}$$

Esercizio 1005

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} \tag{300}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}x^2+3x+2 &= (x+k)^2 + l \\ &= x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ l = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Longrightarrow x^2+3x+2 = \frac{1}{4}\left[(2x+3)^2 - 1\right]\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+3x+2} &= 4\int \frac{dx}{(2x+3)^2-1} \\ &= 2\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2-1} \\ &= \ln\left|\frac{2x+3-1}{2x+3+1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Esercizio 1006

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{301}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 1 + \sqrt{x}$, per cui:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t

$$F(t) = 2\int \sqrt{t}dt = \frac{4}{3}t^{3/2} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3} + C$$

Esercizio 1007

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx \tag{302}$$
$$\int \frac{x^2dx}{2-x^6}$$

***

Soluzione
Il primo è immediato:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{1+\ln x} d\left(1+\ln x\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3}+C$$

Per il secondo poniamo $t = x^3$, per cui:

$$x^2 dx = \frac{dt}{3}$$

L'integrale in funzione di t

$$F\left(t\right) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2-t^2}$$

Decomponiamo l'integrando in frazioni semplici:

$$\frac{1}{2-t^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-t}+\frac{B}{\sqrt{2}+t} = \frac{A\sqrt{2}+At+B\sqrt{2}-Bt}{2-t^2} = \frac{\left(A-B\right)t+A+B}{2-t^2},$$

cioè:

$$1 = \left(A-B\right)t+A+B$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ \left(A+B\right)\sqrt{2}=1 \end{cases},$$

da cui:

$$A = B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Quindi:

$$F\left(t\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{x^2dx}{2-x^6} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^3}{\sqrt{2}-x^3}\right|+C$$

Esercizio 1008

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{303}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = x^2$, per cui:

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

L'integrale in funzione di t

$$F(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$$

Esercizio 1009

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{x^4+\alpha^4} \tag{304}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = x^2$, per cui:

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

L'integrale in funzione di t

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\alpha^4} = \frac{1}{2\alpha^4}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}\int \frac{d\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)}{1+\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}\arctan\frac{t}{\alpha^2} + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{xdx}{x^4+\alpha^4} = \frac{1}{2\alpha^2}\arctan\frac{x^2}{\alpha^2} + C$$

Esercizio 1012

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$$
$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx$$

$$***$$

Soluzione
Il primo si esprime attraverso la funzione arcsin. Infatti:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+C\end{aligned}$$

Per il secondo scriviamo:

$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\alpha^2+\sin^2 x}$$

Ponendo $t=\sin x$, l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}F\left(t\right) &= \int \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha}\int \frac{d\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan t + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{\sin x}{\alpha}\right)+C$$

Esercizio 1013

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$
$$\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

***

Soluzione
Il calcolo di questi integrali è immediato:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} &= \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C \\ \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \arctan(\ln x) + C\end{aligned}$$

Esercizio 1014

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$\int \frac{\arctan x - x}{1+x^2}dx$$

***

Soluzione
Osservando che $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$per il primo abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \arccos x d(\arccos x) \\ &= \frac{1}{2}(\arccos x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Per il secondo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x - x}{1+x^2}dx &= \int \arctan x d(\arctan x) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \ln\sqrt{1+x^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 1015

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x}$$
$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2x dx$$

***

Soluzione
Per il primo integrale:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}\tan^2 x + 1}\underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\tan x)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)^2}$$

Ponendo $t = \sqrt{\frac{3}{2}}\tan x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan t + C$$

Ripristinando la variabile mx:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + C$$

Per il secondo, svincoliamoci dal $\cos^2 x$, attraverso la fomula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + 1$$

Quindi:

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{6 + \frac{5}{2}\cos 2x d}(\cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{5}\int \sqrt{6 + \frac{5}{2}\cos 2x d}\left(6 + \frac{5}{2}\cos 2x\right)$$

$$= -\frac{2}{15}\sqrt{\left(6 + \frac{5}{2}\cos 2x\right)^3} + C$$

Esercizio 1025

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^7 x dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sin^7 x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^3 d\left(\cos x\right)$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = \cos x$, cosicché l'integrale in funzione di y si scrive:

$$\begin{aligned} F\left(y\right) &= -\int \left(1-y^2\right)^3 dy \\ &= -\int \left(-y^6+3y^4-3y^2+1\right) dy \\ &= \frac{1}{7}y^7 - \frac{3}{5}y^5 + y^3 - y + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^7 x dx = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$$

Esercizio 1027

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \tag{305}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1+\sqrt{x}$, per cui:

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t

$$F\left(t\right) = 2\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\cdot 2\sqrt{t} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

Esercizio 1029

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}} \tag{306}$$

Soluzione
Poniamo $t = e^{-x}$, per cui:

$$e^{-x}dx = -dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -\arctan t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}} = -\arctan e^{-x} + C$$

Esercizio 1030

Calcolare l'integrale

$$\int \ln(\sin x)\cos x dx \tag{307}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin x$, per cui:

$$\cos x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \ln t dt$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} F(t) &= t\ln t - \int dt \\ &= t\ln t - t + C \\ &= t(\ln t - 1) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \ln(\sin x)\cos x dx = \sin x\left[\ln(\sin x) - 1\right] + C$$

Esercizio 1032

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \tag{308}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 5 &= (x + k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ l + k^2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow k = -3, \, l = -4 \\
&\Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 \\
&= 4 \left[\left(\frac{x - 3}{2} \right)^2 - 1 \right],
\end{aligned}$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}$$

Poniamo $t = \frac{x-3}{2}$, onde

$$dx = 2dt$$

L'integrale in funzione della variabile ausiliaria t:

$$F(t) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Come è noto, $\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$, cosicché:

$$F(t) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 5}{x - 1} \right| + C$$

Esercizio 1033

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} \tag{309}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2x + 1 &= 2\left(x + k\right)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -2 \\ l + 2k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{2},\, l = \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2x - 1\right)^2 + 1\right],
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} &= 2\int \frac{dx}{\left(2x - 1\right)^2 + 1} \\
&= \int \frac{d\left(2x - 1\right)}{\left(2x - 1\right)^2 + 1} \\
&= \arctan\left(2x - 1\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 1034

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} \tag{310}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
3x^2-2x+2 &= 3\left(x+k\right)^2+l=3x^2+6kx+3k^2+l \\
&\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6k=-2 \\ l+3k^2=2 \end{array}\right. \Longrightarrow k=-\frac{1}{3},\, l=\frac{5}{3} \\
&\Longrightarrow 3x^2-2x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3} \\
&= \frac{5}{3}\left[\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right],
\end{aligned}
$$

per cui:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-2x+2} &= \frac{3}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= \arctan\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 1035

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+11}dx \tag{311}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
5x-4 &= a\frac{d}{dx}\left(3x^2-7x+11\right)+c \\
&= a\left(6x-7\right)+c \\
&\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6a=5 \\ c-7a=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow a=\frac{5}{6}, \quad c=\frac{11}{6} \\
&\Longrightarrow 5x-4=\frac{5}{6}\frac{d}{dx}\left(3x^2-7x+11\right)+\frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

per cui:

$$\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+1}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3x^2-7x+11\right)+\frac{11}{6}F\left(x\right),$$

essendo:

$$F\left(x\right) \overset{def}{=} \int \frac{dx}{3x^2-7x+11}$$

Per calcolare $F\left(x\right)$ scriviamo:

$$\begin{aligned}
3x^2-7x+11 &= 3\left(x+k\right)^2+l = 3x^2+6kx+3k^2+l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 6k=-7 \\ l+3k^2=11 \end{cases} \Longrightarrow k=-\frac{7}{6},\ l=\frac{83}{12} \\
&\Longrightarrow 3x^2-7x+11 = 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{83}{12} \\
&= \frac{83}{12}\left[\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2+1\right],
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-7x+11} &= \frac{12}{83}\int \frac{dx}{\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{83}}\int \frac{d\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)}{1+\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)+C_1
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+11}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3x^2-7x+11\right)+\frac{11}{2\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)+C$$

Esercizio 1036

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+23}} \tag{312}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4x + 23 = 2(x+k)^2 + l &= 2x^2 + 4kx + 3k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ l + 2k^2 = 23 \end{cases} \Longrightarrow k = -1,\, l = 21 \\
&\Longrightarrow 2x^2 - 4x + 23 = 2(x-1)^2 + 21 \\
&= 21 \left\{ \left[\sqrt{\frac{2}{21}} (x-1) \right]^2 + 1 \right\},
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 4x + 23}} &= \frac{1}{\sqrt{21}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]}{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{2}{21}} (x-1) \right] + C
\end{aligned}$$

Esercizio 1038

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan \sqrt{x^2 - 1} dx \tag{313}$$

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = x^2 - 1$, per cui

$$xdx = \frac{1}{2} dt,$$

e l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{t} dt,$$

che può essere calcolato per parti:

$$F(t) = \frac{1}{2} t \arctan \sqrt{t} - \frac{1}{2} \int t d\left(\arctan \sqrt{t}\right)$$

Osserviamo che:

$$\frac{d}{dt}\arctan\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1+t\right)}$$

Quindi:

$$F\left(t\right)=\frac{1}{2}t\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$$

Per calcolare $\int\frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$ eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t=y^2$, quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{t}}{1+t}dt&=2\int\frac{y^2}{1+y^2}dy\\&=2\int\frac{1+y^2-1}{1+y^2}dy\\&=2\int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy\\&=2\left(y-\arctan y\right)+C_1\\&=2\left(\sqrt{t}-\arctan\sqrt{t}\right)+C_1\end{aligned}$$

Perciò:

$$F\left(t\right)=\frac{1}{2}t\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{t}+C$$

Ripristinando

$$\int x\arctan\sqrt{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$$

Esercizio 1112

Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-3x+2}}\tag{314}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
4x^2-3x+2 &= 4\left(x+k\right)^2+l = 4x^2+8kx+k^2+l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k=-\frac{3}{8} \\ l=\frac{23}{16} \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow 4x^2-3x+2 = 4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16} \\
&= 4\left[\left(\frac{8x-3}{\sqrt{23}}\right)^2+1\right]
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3x+2}} &= 4\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{8x-3}{\sqrt{23}}\right)^2+1}} \\
&= \frac{1}{2}\text{arcsinh}\left(\frac{8x-3}{\sqrt{23}}\right)+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 1115

Calcolare l'integrale indefinito:

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \tag{315}
$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale semplice contenente un trinomio di secondo grado, quindi applichiamo il procedimento standard:

$$
\begin{aligned}
1+x+x^2 &= \left(x+k\right)^2+l = x^2+2kx+k^2+l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k=1 \\ l+k^2=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k=\frac{1}{2} \\ l=\frac{3}{4} \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow 1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}$$

$$= \ln \left| \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right| + C_1$$

$$= \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2} \right| + \underbrace{\ln \frac{2}{3} + C_1}_{\stackrel{def}{=} C}$$

Esercizio 1037

Si chiede di calcolare i seguenti integrali considerandoli come il limite delle corrispondenti somme integrali.

$$1) \int_0^b x^2 dx \quad 2) \int_a^b dx \quad 3) \int_0^T (v_0 + gt)\, dt, \text{ con } v_0, g = \text{const}$$

$$4) \int_{-2}^1 x^2 dx \quad 5) \int_0^{10} 2^x dx \quad 6) \; f(x) = \int_0^x \sin t dt$$

Soluzioni

1. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, b]$:

$$x_k = k\frac{b}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \frac{b}{n}$$

La somma integrale:

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Prendiamo $\xi_k = x_k$:

$$\sigma_{D_n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Ma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(n-1)}{6},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{b^3}{6}\frac{(2n-1)\,(n-1)}{n^2},$$

da cui l'integrale:

$$\int\limits_0^b x^2 dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{b^3}{3}$$

2. Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[a,b]$:

$$x_k = a + \frac{k\,(b-a)}{n}, \;\; k \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

L'ampiezza di D_n è:

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}$$

La somma integrale è:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f\,(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\,(\xi_k) \\ &= b - a, \end{aligned}$$

giacchè

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\,(\xi_k) = n$$

Quindi:

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{\delta_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = b - a$$

3. Quest'integrale ha una semplice interpretazione fisica, se poniamo:

$$y\,(T) = \int\limits_0^T (v_0 + gt)\,dt$$

Qui $y(T)$ è al tempo T la quota di un punto materiale in caduta libera in un campo gravitazionale (g è l'accelerazione di gravità) con velocità iniziale v_0. L'asse y è orientato verso il basso e si trascura la resistenza dell'aria. L'integrando è la velocità istantanea:

$$v(t) = v_0 + gt$$

Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[0,T]$:

$$t_k = k\frac{T}{n}, \quad \text{con} \quad k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,...,n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \max_{k\in\mathcal{N}} (t_{k+1} - t_k) = \frac{T}{n}$$

La somma integrale è

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(v_0 + g\frac{T}{n}k\right)\\ &= Tv_0 + \frac{n+1}{n}\frac{gT^2}{2}\end{aligned}$$

Quindi l'integrale:

$$\begin{aligned}y(T) &= \lim_{\delta_n\to 0}\sigma_{D_n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sigma_{D_n}\\ &= v_0T + \frac{1}{2}gT^2\end{aligned}$$

4. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[-2,1]$:

$$x_k = -2 + \frac{3}{n}k, \quad \text{con } k = 0,1,...,n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{3}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\\ &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{n}k - 2\right)^2\\ &= \frac{3}{2}\frac{2n^2-3n+3}{n}\end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = 3$$

5. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, 10]$:

$$x_k = \frac{10}{n} k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{10}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k \frac{10}{n}} \\ &= \frac{5 2^{\frac{10+n}{n}} \left(-1 + (1024)^{1/n}\right)^n}{\left(-1 + 1024^{1/n}\right)^n} \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{0}^{10} 2^x dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{10230}{\ln (1024)}$$

6. Eseguiamo l'equipartizione:

$$t_k = k \frac{x}{n}, \ \text{ con } k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ è:

$$\delta_{k,n} = t_{k+1} - t_k = \frac{x}{n},$$

donde l'ampiezza della partizione:

$$\delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (\delta_k) = \frac{x}{n}$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$ e ponendo $g(t) = \sin t$:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} g(t_{k+1}) \frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \left(k \frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

Per il calcolo della sommatoria utilizziamo una nota relazione trigonometrica:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ky) = \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{x\left\{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x\left\{\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)x\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} \\
&= \frac{x\left(1-\cos x\right)}{2\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il limite a denominatore:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) \underset{m=n^{-1}}{=} \lim_{m\to0^+} \frac{\sin\left(\frac{mx}{2}\right)}{m} = \frac{x}{2},$$

Quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} = 1 - \cos x$$

Esercizio 1039

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx \tag{316}$$

Soluzione
Procediamo per decomposizione

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx &= \sqrt{2}\int_0^8 x^{1/2} dx + \int_0^8 x^{1/3} dx \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8^{3/2} + \frac{3}{4} \cdot 8^{4/3} \\
&= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 1040

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy \tag{317}$$

Soluzione
Procediamo per decomposizione

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy &= \int_1^4 y^{-2} dy + \int_1^4 y^{-3/2} dy \\
&= \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-2y^{-1/2}\right]_1^4 \\
&= -\frac{1}{4} + 1 + \left(-2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1\right) = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 1041

Assegnata la funzione:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt, \tag{318}$$

essendo $\alpha, \beta \in C^1(X)$, con $X \subseteq \mathbb{R}$. Si calcoli la derivata di $F(x)$.

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int f(t)\, dt$$

Quindi:

$$G'(t) = f(t)$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)]$$

Derivando ambo i membri:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} G[\beta(x)] - \frac{d}{dx} G[\alpha(x)]$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F'(x) = \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \tag{319}$$

Ad esempio:

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{-t^2} dt$$

Qui poniamo:

$$G'(t) = e^{-t^2}$$

Per la (326):

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xG'\left(x^2\right) - G\left(x^2\right) \\ &= 2xe^{-x^4} - e^{-x^2} \end{aligned} \tag{320}$$

Esercizio 1042

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_{1}^{x} \ln t dt \tag{321}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \ln t dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \ln t$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione.
Derivando ambo i membri:

$$F'(x) = \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)]$$

Cioè:

$$F'(x) = \ln x$$

Esercizio 1044

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \tag{322}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \cos t^2 dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \cos t^2$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}, \beta(x) = \sqrt{x}$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} G'\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Esercizio 1045

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \tag{323}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \frac{\sin t}{t}$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = x$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= G'(x) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Esercizio 1045

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \qquad (324)$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \frac{\sin t}{t}$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)\big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = x$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= G'(x) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Esercizio 1046

Determinare una sostituzione lineare:

$$x = at + b$$

tale che gli estremi di integrazione dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \quad (x_1 > x_2),$$

siano rispettivamente 0 e 1.

Soluzione
La variabile di integrazione x è tale che:

$$x_1 \leq x = at + b \leq x_2,$$

da cui ricaviamo l'intervallo di appartenenza della variabile t:

$$\frac{x_1 - b}{a} \leq t \leq \frac{x_2 - b}{a}$$

Dobbiamo determinare a, b tali che:

$$0 \leq t \leq 1$$

Cioè:

$$\begin{cases} \frac{x_1 - b}{a} = 0 \\ \frac{x_2 - b}{a} = 1 \end{cases} \Longrightarrow b = x_1, \;\; a = x_2 - x_1$$

Quindi la sostituzione richiesta è:

$$x = (x_2 - x_1)\, t + x_1$$

Perciò:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \;= (x_2 - x_1) \int_0^1 f\left[(x_2 - x_1)\, t + x_1\right] dt$$

Esercizio 1048

Si calcoli il seguente integrale definito:

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} x^2 \sqrt{\xi^2 - x^2}\, dx, \quad \text{con } \xi > 0, \tag{325}$$

eseguendo il cambio di variabile $x = \xi \sin t$.

Soluzione
Abbiamo

$$dx = \xi \cos t dt$$

Determiniamo i nuovi estremi di integrazione:

$$0 \leq x = \xi \sin t \leq \xi,$$

cioè:

$$0 \leq \sin t \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

cosicchè l'integrale diviene:

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \xi^4 \int_0^{\xi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\xi^4}{4} \int_0^{\xi} \sin^2 2t dt \\
&= \frac{\xi^4}{8} \int_0^{\xi} \sin^2 2t d(2t) \\
&= \frac{\xi^4}{8} \left[t - \frac{1}{2} \sin 4t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi \xi^4}{16}
\end{aligned}$$

Esercizio 1049

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{2}^{6} \sqrt{x-2}dx \tag{326}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{x-2}dx = \int (x-2)^{1/2} d(x-2) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C, \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_{2}^{6} \sqrt{x-2}dx = F(x)|_{2}^{6} = \frac{16}{3}$$

Esercizio 1050

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} \tag{327}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_{2}^{6} = \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3) \\ &= \ln\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Esercizio 1051

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} \tag{328}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(25+3x)}{\sqrt{25+3x}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{25+3x} + C \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{2}{3}\left.\sqrt{25+3x}\right|_{0}^{-3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 1052

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+3x+2} dx \tag{329}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+3x+2} dx$$

Scriviamo:

$$x = a\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+2\right) + b,$$

con a, b coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned} x &= 2ax + 3a + b \\ &\Longrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+3x+2\right)}{x^2+3x+2} - \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+3x+2}}_{=F_1(x)} \tag{330}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+2\right| - \frac{3}{2}F_1(x)$$

Calcoliamo

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

A tale scopo scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2+3x+2 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 3 \\ l + k^2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{3}{2},\ l = -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow x^2+3x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x+3)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 2\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2-1} = \ln\left|\frac{2x+3-1}{2x+3+1}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (337):

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+2\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

Osservando che $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C \\
&= 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

E attraverso questa espressione siamo in grado di valutare l'integrale definito:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx &= \left[2\ln|x+2| - \ln|x+1|\right]_0^1 \\
&= 2\ln 3 - 3\ln 2 \\
&= \ln\frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Esercizio 1053

Trasformare e calcolare l'integrale definito, con la sostituzione indicata a fianco:

$$\int_1^3 \sqrt{x+a}dx, \quad \text{con } x = 2t - a, \tag{331}$$

essendo $a > 0$.
Soluzione
Abbiamo:

$$x = 2t - a \Longrightarrow dx = 2dt,$$

mentre gli estremi di integrazione cambiano in:

$$1 \leq x = 2t - a \leq 3$$

Cioè:

$$\begin{aligned} 1 + a \leq 2t \leq 3 + a \\ \Longrightarrow \frac{1+a}{2} \leq t \leq \frac{3+a}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{x+a}dx &= 2\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{2t}dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{t}dt \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}[t]_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}\left[\frac{(3+a)^{3/2}}{2^{3/2}} - \frac{(1+a)^{3/2}}{2^{3/2}}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[(3+a)\sqrt{3+a} - (1+a)\sqrt{1+a}\right] \end{aligned}$$

Esercizio 1054

Trasformare l'integrale definito, con la sostituzione indicata a fianco:

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \text{con } x = \sin t, \tag{332}$$

essendo $a > 0$.

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
x &= \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt \\
\sqrt{1-x^4} &= 1-\sin^4 t \\
&\left(1-\sin^2 t\right)\left(1+\sin^2 t\right) \\
&= \cos^2 t\left(1+\sin^2 t\right),
\end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova varaibile t

$$\frac{1}{2} \leq x = \sin t \leq 1$$

Cioè:

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

Esercizio 1056

Se f è una qualunque funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, determinare la trasformazione dell'integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,$$

in seguito alla sostituzione $x = \arctan x$
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
x &= \sinh t \Longrightarrow dx = \cosh t dt \\
\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= dt
\end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile t

$$\frac{3}{4} \leq x = \sinh t \leq \frac{4}{3}$$

Cioè:

$$\sinh t \geq \frac{3}{4} \Longleftrightarrow t \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1}\right| = \ln 2$$

$$\sinh t \leq \frac{4}{3} \Longleftrightarrow t \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1}\right| = \ln 3,$$

giacchè:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|$$

Quindi:

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

Esercizio 1057

Sia f è una qualunque funzione continua in $[-a, a]$. Dimostrare che se f è pari:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx \tag{333}$$

Se invece f è dispari:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \tag{334}$$

Soluzione
In entrambi i casi possiamo scrivere:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx \tag{335}$$

Nel primo integrale a secondo membro eseguiamo la sostituzione:

$$x = -x' \Longrightarrow dx = -dx' \tag{336}$$

I nuovi estremi di integrazione sono tali che:

$$-a \leq x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$a \geq x' \geq 0$$

Quindi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{f(x)=f(-x)}{=} -\int_{a}^{0} f(x')\,dx' = \int_{0}^{a} f(x')\,dx' = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{337}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che x' è una variabile muta. Sostituendo la (344) nella (342), otteniamo la (340).
Se f è dispari, il cambio di variabile (343) implica;

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{f(x)=-f(-x)}{=} \int_{a}^{0} f(x')\,dx' = -\int_{0}^{a} f(x')\,dx' = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{338}$$

Sostituendo la (345) nella (342), otteniamo la (341).

Esercizio 1058

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x = t^2 \tag{339}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = t^2 \leq 4$$

Cioè:

$$0 \leq t \leq 2$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= 2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt \\
&= 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{1+t}\right) \\
&= 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t} \\
&= 4 - 2\left[\ln|1+t|\right]_0^2 \\
&= 4 - 2\ln 3
\end{aligned}
$$

Esercizio 1059

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$
\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx, \quad x-2=t^3 \tag{340}
$$

Soluzione
Abbiamo:

$$
x-2=t^3 \Longrightarrow dx = 3t^2 dt
$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$
3 \le x = 2+t^3 \le 29
$$

Cioè:

$$
1 \le t^3 \le 27 \Longrightarrow 1 \le t \le 3
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3} dx &= 3\int_1^3 \frac{t^4 dt}{t^2+3} \\
&= 3\int_1^3 \left(-3+t^2+\frac{9}{3+t^2}\right) dt \\
&= -9\int_1^3 dt + 3\int_1^3 t^2 dt + 27\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2} \\
&= -18+26+27\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2} &= \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^3 \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{t=1}^{t=3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1060

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx, \quad e^x-1=t^2 \tag{341}
$$

Soluzione
Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
e^x-1=t^2 &\Longrightarrow e^x dx = 2tdt \\
&\Longrightarrow dx = \frac{2t}{e^x}dt = \frac{2tdt}{t^2+1}
\end{aligned}
$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = \ln\left(1 + t^2\right) \leq \ln 2$$

Cioè:

$$1 \leq 1 + t^2 \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} \\
&= 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} dt \\
&= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \\
&= 2 \left(1 - \arctan t|_0^1\right) \\
&= 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 1061

Assegnato l'integrale della funzione di Gauss e^{-x^2}:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \tag{342}$$

dimostrare che soddisfa la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione
L'integrale (349) può essere scritto come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{343}$$

Nel primo integrale a secondo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = -x',$$

onde:

$$dx = -dx'$$
$$e^{-x^2} = e^{-x'^2},$$

giacché la funzione di Gauss è manifestamente pari.
Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione x' sono tali che:

$$-\infty < x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$+\infty > x' \geq 0$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{344}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che x' è una variabile muta.
Sostituendo il risultato (351) nella (350):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{345}$$

Ora nell'integrale a secondo membro della (352) operiamo la sostituzione $x = \sqrt{t}$, per cui:

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$e^{-x^2} = e^{-t}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 < x = \sqrt{t} < +\infty,$$

cioè:

$$0 < t < +\infty,$$

onde:

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Si conclude che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Esercizio 1062

Dimostrare:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \tag{346}$$

Soluzione
Nell' integrale a secondo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = \cos t,$$

onde:

$$dx = -\sin t dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 \leq x = \cos t \leq 1,$$

cioè:

$$\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$$

Quindi:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

Esercizio 1063

Sia $f(x)$ una funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dimostrare:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx \tag{347}$$

Soluzione
Nell' integrale a primo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = \arcsin t,$$

onde:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 \leq x = \arcsin t \leq \frac{\pi}{2},$$

cioè:

$$0 \leq t \leq 1$$

Quindi:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{348}$$

Eseguiamo un ulteriore cambio di variabile. Precisamente, sull'integrale a secondo membro, ponendo $t = \cos \eta$, per cui:

$$dt = -\sin \eta d\eta$$
$$\sqrt{1-t^2} = \sin \eta$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione η sono tali che:

$$0 \leq t = \cos \eta \leq 1,$$

cioè:

$$\frac{\pi}{2} \geq \eta \geq 0,$$

cosicchè:

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_{\pi/2}^0 f(\cos \eta)\, d\eta = \int_0^{\pi/2} f(\cos \eta)\, d\eta = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$$

Sostituendo tale risultato nella (355) otteniamo la (354).

Esercizio 1064

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx \tag{349}$$

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti. Nel caso di un integrale definito, se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili nell'intervallo $[a, b]$, è facile dimostrare la seguente relazione:

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx$$

Nel caso dell'integrale assegnato, abbiamo:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \int_0^{\pi/2} xd(\sin x)$$
$$= x\sin x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$
$$= \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 1065

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \ln x dx \tag{350}$$

Soluzione
Integrazione per parti:

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e xd(\ln x)$$
$$= e - \int_1^e dx$$
$$= e + x|_1^e$$
$$= 1$$

Esercizio 1066

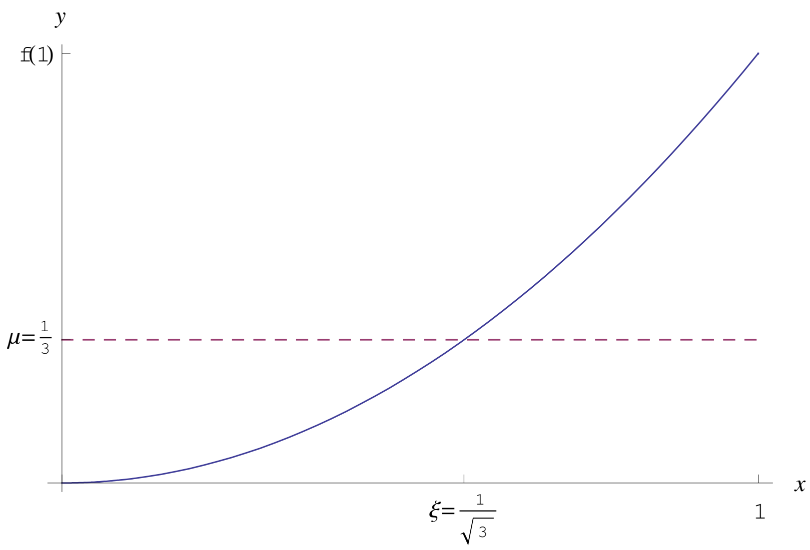
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.
Soluzione
La media integrale è data da:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nel caso della funzione assegnata:

$$\mu = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\, x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$



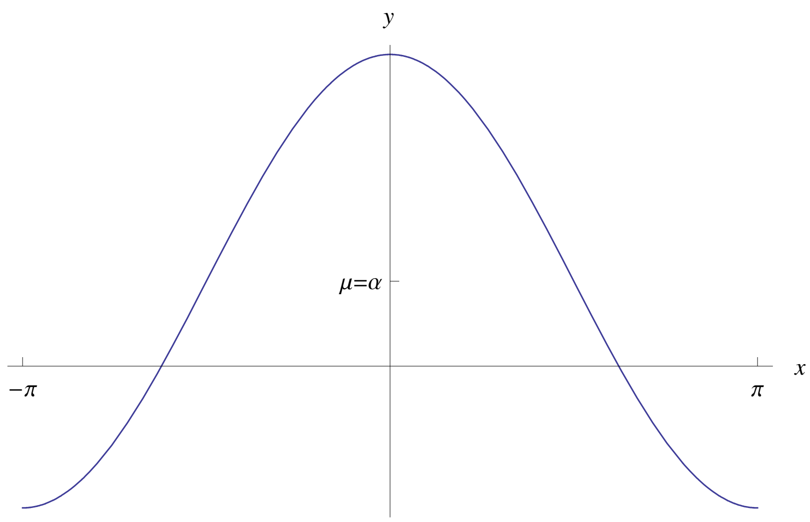
Esercizio 1067

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \alpha + \beta \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\alpha + \beta \cos x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha \int_{-\pi}^{\pi} dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\alpha + \beta\, (\sin x)|_{\pi}^{-\pi}\right] = \alpha\end{aligned}$$

Esercizio 1068

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \sin^2 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
Soluzione



La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(1 - \cos 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos 2x d\left(2x\right)\right]\end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro è nullo:

$$\int_0^\pi \cos 2x d\left(2x\right) = \sin 2x|_0^\pi = 0$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1069

Determinare la media integrale della funzione $f\left(x\right) = \sin^4 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^4 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \\ &\Longrightarrow \sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - 2\int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \cos^2 2x dx\right] \end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo (v. es. 1068), mentre il secondo

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 2x dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos 4x + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 4x dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

giacchè

$$\int_0^{\pi} \cos kx dx = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

Esercizio 1143

Determinare l'area della regione del piano limitata dalle due parabole $y = -x^2 + x + 2$, $y = x^2 - 3x + 2$.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

cioè:

$$x = 0, y = 2 \Longrightarrow A(0, 2)$$
$$x = 2, y = 0 \Longrightarrow B(2, 0)$$

La superficie racchiusa tra le due parabole è riportata in figura 3
Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \ f_2(x) \leq y \leq f_1(x) \right\},$$

essendo:

$$f_1(x) = -x^2 + x + 2, \ \ f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

L'area richiesta è:

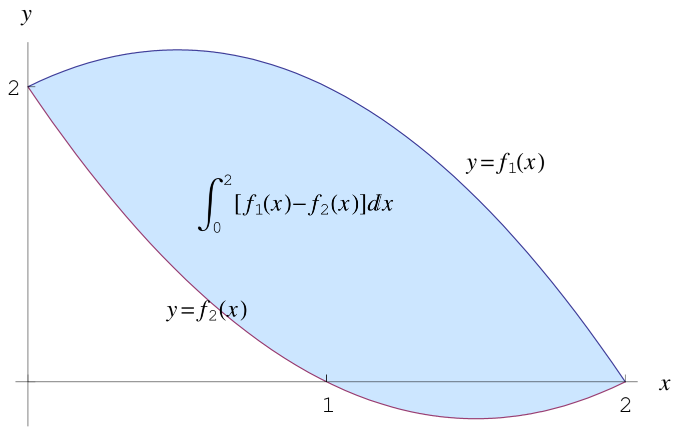


Figure 3:

$$
\begin{aligned}
S = \operatorname{mis} \mathcal{R} = \int_0^2 \left[f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right] dx = \\
= \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx \\
= -2\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 dx \\
= -\frac{2}{3}\, x^3\Big|_0^2 + 2\, x^2\Big|_0^2 \\
= -\frac{2}{3}\left(8 - 0\right) + 8 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1146

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'area della regione del piano limitata dalla parabola $y^2 = 4x$, dalla retta $2x + y - 4 = 0$ e dall'asse x.

***

Soluzione

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione della retta con la parabola

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 1, 4$$

Quindi otteniamo i punti di intersezione:

$$A\,(2,0)\ ,\ \ B\,(1,2)$$

Quindi:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2\sqrt{x}\right\} \\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le -2x + 4\right\} \end{aligned}$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{mis}\mathcal{R} = \operatorname{mis}\mathcal{R}_1 + \operatorname{mis}\mathcal{R}_2 \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 (-2x+4)\,dx = \\ &= \frac{4}{3}\,x^{2/3}\Big|_0^1 + 4\,x\Big|_1^2 - x^2\Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + 4 - (4-1) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 1147

Determinare l'area della regione del piano limitata dalla parabola $\gamma)\ x^2 - 9y = 0$ e dalla retta $r)\ x - 3y + 6 = 0$.

***

Soluzione

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} x^2 - 9y = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \Longleftrightarrow x = -3, 6$$

Quindi:

$$A\left(-3,1\right), B\left(6,4\right) \in \gamma \cap r$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 4

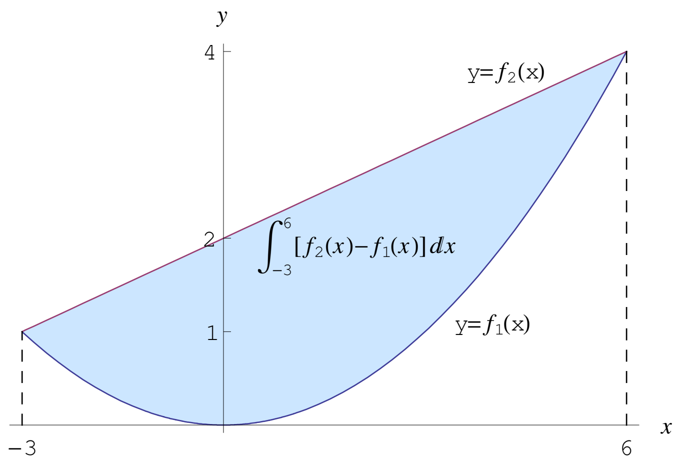


Figure 4:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 6, \, \frac{x^2}{9} \leq y \leq \frac{x}{3} + 2\right\},$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned}
S = \operatorname{mis}\mathcal{R} &= \int\limits_{-3}^{6} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{9}\right) dx = \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{6} x dx + 2\int\limits_{-3}^{6} dx - \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{6} x^2 dx \\
&= \frac{1}{6}\, x^2\Big|_{-3}^{6} + 2\, x\Big|_{-3}^{6} - \frac{1}{27}\, x^3\Big|_{-3}^{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(36 - 9\right) + 2\left(6 + 3\right) - \frac{1}{27}\left(6^3 + 27\right) \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 1148

Determinare le coordinate dei punti di intersezione della parabole γ_1) $y = 2x^2 + 1$, γ_2) $y = x^2 + 5$, calcolando poi l'area della regione del piano limitata dagli archi delle due curve aventi per estremi i suddetti punti di intersezione.

***

Soluzione

Per determinare le coordinate dei punti di intersezione, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 \\ y = x^2 + 5 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 2$$

Quindi:

$$A(-2, 9), B(2, 9) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 5

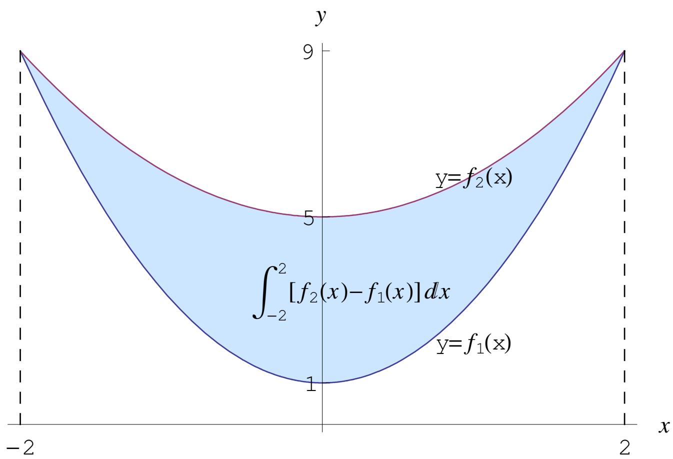


Figure 5:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2,\ 2x^2 + 1 \leq y \leq x^2 + 5\right\},$$

L'area richiesta è:

$$S = \operatorname{mis} \mathcal{R} = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 5 - 2x^2 - 1 \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \, x^3 \Big|_{-2}^{2} + 4 \, x \Big|_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{16}{3} + 16 = \frac{13}{3}$$

Esercizio 1149

Si determini l'area del segmento parabolico intercettato dalla parabola $\gamma)$ $y = -x^2 + 4x - 1$ e dalla retta $r)$ $y - 2 = 0$.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1, 3$$

Quindi:

$$A\,(1, 2)\,, B\,(3, 2) \in \gamma \cap r$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 6
Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq -x^2 + 4x - 1 \right\},$$

L'area richiesta è:

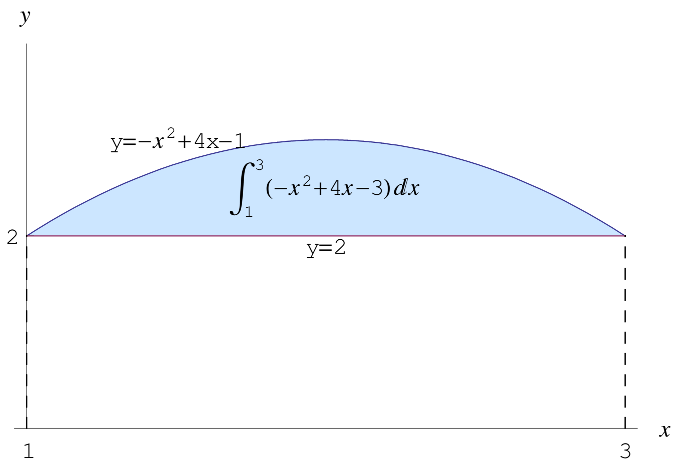


Figure 6:

$$
\begin{aligned}
S = \operatorname{mis}\mathcal{R} &= \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right) dx = \\
&= -\int_1^3 x^2 dx + 4\int_1^3 x dx - 3\int_1^3 dx \\
&= -\frac{1}{3}\, x^3\Big|_1^3 + 2\, x^2\Big|_1^3 - 3\, x\Big|_1^3 \\
&= -\frac{1}{3}\cdot 26 + 2\,(9-1) - 3\,(3-1) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1154

Si determini l'area della regione del piano limitata dalle due parabole $\gamma_1)$ $y^2 = 16x$ e $\gamma_2)$ $y^2 = x^3$ e che giace nel primo quadrante.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione:

$$
\begin{cases} y^2 = 16x \\ y^2 = x^3 \end{cases},
$$

cioè:

$$x^3 = 16x \Longleftrightarrow x\left(x^2 - 16\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = \pm 4$$

La soluzione che ci interessa è $x = 4$, quindi il punto di intersezione è $A\,(4, 8)$.
La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 7

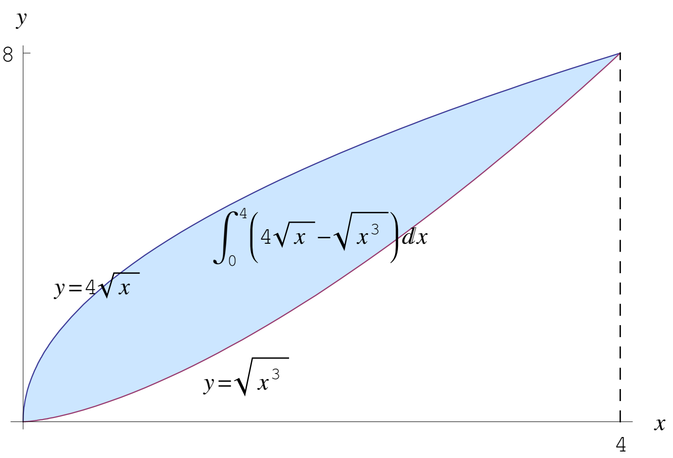


Figure 7:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x^3} \leq y \leq 4\sqrt{x}\right\},$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned}
S = \operatorname{mis}\mathcal{R} &= \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \sqrt{x^3}\right) dx = \\
&= 4\int_0^4 x^{1/2} dx - \int_0^4 x^{3/2} dx \\
&= 4 \cdot \frac{2}{3}\, x^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{2}{5}\, x^{5/2}\Big|_0^4 \\
&= \frac{2^6}{3} - \frac{2^6}{5} = \frac{2^7}{15} = \frac{128}{15}
\end{aligned}$$

Esercizio 1155

Si determini l'area del cappio individuato dalla curva:

$$x^3 - 4a\left(x^2 - y^2\right) = 0$$

***

Soluzione
La curva assegnata è data in forma implicita:

$$f(x, y) = 0,$$

essendo:

$$f(x, y) \stackrel{def}{=} x^3 - 4a\left(x^2 - y^2\right)$$

Osserviamo che:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = f(x, -y)$$

Ciò implica la simmetria della curva rispetto all'asse x.
L'equazione può essere comunque esplicitata:

$$y = \pm \frac{x\sqrt{4a - x}}{2\sqrt{a}}$$

Il "cappio" è riportato in figura 8

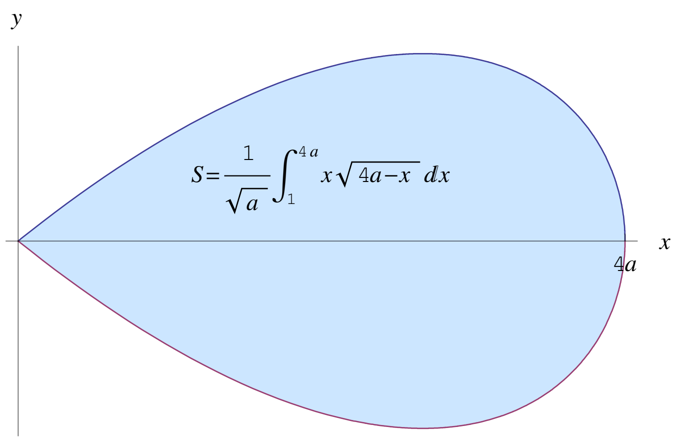


Figure 8:

È evidente che:

$$S = 2\,\mathrm{mis}\,\mathcal{R},$$

essendo:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4a,\, 0 \le y \le \frac{x\sqrt{4a-x}}{2\sqrt{a}} \right\},$$

Quindi

$$S = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{4a} x\sqrt{4a-x}dx$$

Eseguiamo il cambio di variabile $4a - x = t^2$, per cui:

$$dx = -tdt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$0 \le x = 4a - t^2 \le 4a$$

cioè:

$$4a \ge t^2 \ge 0 \Longrightarrow 2\sqrt{a} \le t \le 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(4a - t^2\right) t\,(-2t)\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(2t^4 - 8at^2\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(t^4 - 4at^2\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{5}\, t^5\Big|_{2\sqrt{a}}^{0} - \frac{4}{3}a\, t^3\Big|_{2\sqrt{a}}^{0} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left[-\frac{2^5 a^{5/2}}{5} - \frac{4}{3}a\left(0 - 2^3 a^{3/2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(-\frac{2^5 a^{5/2}}{5} + \frac{2^5}{3} a^{5/2} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot 2^5 \cdot a^{5/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{128}{15} a^2
\end{aligned}$$