

1 Estremo superiore e inferiore

Calcolare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali, e dire se si tratta rispettivamente di un massimo o di un minimo (qui si intende che $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$):

1 $E = \{x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]\}$

2 $E = \left\{x = (-1)^n \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

3 $E = \left\{x = (-1)^n \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

4 $E = \left\{x = \frac{n}{n^2+20}, n \in \mathbb{N}\right\}$

5 $E = \left\{x = \frac{n^2+5n+1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$

6 $E = \left\{x = \sqrt{1 - \frac{1}{2n+5}}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$

7 $E = \left\{x = \frac{2}{m} - \frac{1}{n^2}, n, m \in \mathbb{N}\right\}$

8 $E = \left\{x = \frac{m^2-3}{n+1}, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$

9 $E = \left\{x = \frac{3n+2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

10 $E = \left\{x = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

11 $E = \left\{x = \frac{n-3}{n^2}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup (-1, 1)$

12 $E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+2} \leq x+3\}$

13 $E = \left\{x = \frac{t+1}{t-2} : t \in \mathbb{R}, t > 2\right\}$

14 $E = \left\{x = \frac{1-n}{1+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

15 $E = \{x \in \mathbb{R} : (\ln x)^3 - 2 \ln x < 0\}$

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle seguenti successioni e dire se sono rispettivamente massimo e minimo ($n = 1, 2, \dots$, se non precisato diversamente)

16 $a_n = \begin{cases} e^{-(n-4)^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{3}{n^2-2n+2} - 1 & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

17 $a_n = \begin{cases} \frac{n-3}{4n+4} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ e^{-(n-5)^2} & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

18 $a_n = \left(\cos^2 \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{n-1}{n^2+2}$

19 $a_n = (1 - \cos(n\pi))n + \frac{1}{n}$

20 Calcolare gli estremi superiore e inferiore di ciascuno degli insiemi numerici

$E = \left\{\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad F = \left\{2n + \frac{3}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(ove si intende $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$).

2 Risposte ad alcuni esercizi

1: $\max E = 1, \inf E = -\frac{1}{2}$;

2: $\sup E = 2, \inf E = -2$;

3: $\max E = \frac{5}{2}, \min E = -3$;

4: $\max E = \frac{1}{9}, \inf E = 0$;

5: $\max E = 7, \inf E = 1$;

6: $\sup E = 1, \min E = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

7: $\sup E = 2, \inf E = -1$;

8: $\sup E = +\infty, \min E = -3$;

9: $\max E = 5, \inf E = 3$;

10: $\sup E = +\infty, \min E = 0$;

11: $\sup E = 1, \min E = -2$;

12: $\sup E = +\infty, \min E = \frac{7}{6}$;

13: $\sup E = +\infty, \inf E = 1$;

14: $\sup E = \max E = 1, \inf E = -1$;

15: $\sup E = e^{\sqrt{2}}, \inf E = 0$;

20: $\sup E = 3; \inf E = \min E = \frac{3}{5}; \sup F = +\infty; \inf F = 2$;