Equazioni differenziali

Comandi	Commenti
	Vediamo come si può risolvere il problema di Cauchy: $$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$.
function z=funzione(t,y) z=t	**Esempio 1**: Consideriamo il seguente caso banale: $\begin{cases} y' = t \\ y(0) = 1 \end{cases}$. La soluzione cercata è $y = \frac{t^2}{2} + 1$. Per risolvere il problema con Matlab, occorre innanzitutto definire una funzione di due variabili in un M-file come a fianco. Il file deve essere salvato come funzione.m
• tstan=[0 10]	E’ necessario definire un intervallo di integrazione. Nell’esempio cerchiamo una soluzione nell’intervallo [0,10].
• [t,y]=ode23(‘funzione’,tstan,1)	L’istruzione usata, ode23, è bastata sul metodo di Runge-Kutta del 2 e 3 ordine.
• [t,y]=ode45(‘funzione’,tstan,1)	L’istruzione usata, ode45, è bastata sul metodo di Runge-Kutta del 4 e 5 ordine.
• t • y	Vengono mostrati a schermo i valori di t e di y (soluzione numerica dell’equazione). Il programma non fornisce l’espressione della soluzione del problema di Cauchy ma un insieme di valori numerici da essa assunti.
• plot(t,y)	Grafico della soluzione trovata
• polyfit(t,y,2)	Polinomio interpolatore di 2 grado.
function F=odefile(t,y)	**Sintassi generale per un M-file** per la risoluzione del problema di Cauchy

F=F(t,y)	$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Il file deve essere salvato come odefile.m
• tstan=[to tfinal] • [t,y]=ode23('odefile',tstan,y0) • [t,y]=ode45('odefile',tstan,y0)	La **sintassi generale** per la risoluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$ è quella a fianco. Nota che t0 è l'estremo sinistro dell'intervallo.
function z=funzione2(t,y) z=y-t	**Esempio 2.** Studiamo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine. L'integrale generale è $y=ce^x+x+1$. L'integrale particolare è y=x+1. Definiamo un M-file come a fianco (salvandolo come funzione2.m).
• tstan=[0 5] • [t,y]=ode23('funzione2',tstan,1) • [t,y]=ode45('funzione2',tstan,1) • t • y • plot(t,y)	Ricerca della soluzione. Nella maggior parte dei problemi il comando ode45 è da preferire al comando ode23 poiché garantisce una precisione superiore.
function z=funzione3(t,y)	**Esempio 3.** Risolviamo ora un'equazione differenziale del secondo ordine. $\begin{cases} y'' + y = t^3 - 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ Per risolverla, occorre trasformarla in un sistema di due equazioni del primo ordine nel seguente

z=[y(2);t.^3-2-y(1)]	modo: $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + t^3 - 2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$ dove abbiamo posto y1=y e y2=y’ L’integrale generale è y(t)=Acos(t)+Bsin(t)+t3-6t-2. La soluzione particolare del problema di Cauchy è y(t)=2cos(t)+t3-6t-2. Definiamo un M-file come a fianco e salviamolo come funzione3.m Nota che la funzione cosi’ definita è una funzione vettoriale nelle variabili t e y. y è una matrice formata da due colonne y(1) e y(2).
• tstan =[0 5]	Intervallo di integrazione
• y0=[0 0]	Condizioni iniziali di y e y’.
• [t,y]=ode23('funzione3',tstan,y0);	Soluzione.
• plot(t,y)	Grafico di y e di y’.
• plot(t,y(:,1))	Grafico della soluzione Con y(:,1) ci riferiamo alla prima colonna della matrice y.
• plot(t,y(:,2))	Grafico della derivata. Con y(:,2) ci riferiamo alla seconda colonna della matrice y.
	Esempio 4. Risolviamo ora un’altra equazione differenziale del secondo ordine.

function z=funzione4(t,y) z=[y(2);y(2).*(1-y(1).^2)-y(1)]	$\begin{cases} y'' + (y^2-1)y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0.25 \end{cases}$ Per risolverla, occorre trasformarla in un sistema di due equazioni del primo ordine nel seguente modo: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_2(1-y_1^2) - y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0.25 \end{cases}$ dove abbiamo posto y1=y e y2=y' Definiamo un M-file come a fianco e salviamolo come funzione4.m
• tstan=[0 5] • y0=[0 0.25] • [t,y]=ode23('funzione4',tstan,y0); • plot(t,y)	Risoluzione dell'equazione.
function z=funzione5(t,y) z=t.*(y-y.^3)	**Esempio 5.** Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = x(y - y^3) \\ y(0) = 2 \end{cases}$. (Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli. A fianco l'M-file corrispondente.)
function z = vdp1000(t , y) z = [y(2) ; 1000*(1-y(1).^2).*y(2)-y(1)]; tstan=[0 3000]	**Esempio 6.** Consideriamo l'equazione di Van der Pol: $y''- m (1-y^2)y'+y=0$ che governa l'intensità di corrente in un circuito oscillante a triodo. Consideriamo in particolare il caso critico che si ha per m =1000: $y''-1000(1-y^2)y'+y=0$ Procedendo come negli esempi precedenti, si

y0=[2 0] [t,y] = ode15s('vdp1000',tstan,y0); plot(t,y(:,1));	scrive il seguente sistema equivalente all'equazione data: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$ Il corrispondente M-file è quello a fianco che deve essere salvato come vdp1000.m Per la risoluzione di questa equazione i metodi visti fino ad adesso si rivelano però inadeguati dal momento che la soluzione cercata è una funzione che varia con estrema rapidità. Il comando da usare in questo caso è ode15s dove s indica "stiff".