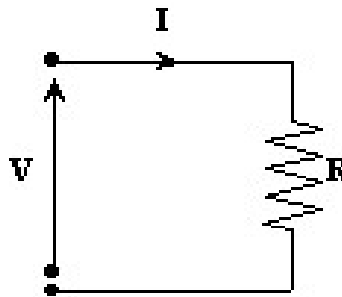


## METODO VOLTAMPEROMETRICO

Tale metodo consente di misurare indirettamente una resistenza elettrica ed impiega la definizione stessa di resistenza :

$$R = \frac{V}{I}$$

dove  $V$  rappresenta la tensione ai capi della resistenza  $R$  e  $I$  la corrente che la attraversa come da figura 1



Quindi, per determinare il valore della resistenza incognita, la resistenza viene alimentata in continua e vengono misurate tensione corrente. Nella realizzazione del circuito, si presentano due collegamenti possibili per gli strumenti e precisamente:

- voltmetro a monte dell'amperometro
- voltmetro a valle dell' amperometro

L'espressione a monte e a valle si riferisce sempre al senso dell' energia la quale scorre dal generatore verso l'utilizzatore: nel primo caso il voltmetro è prima dell'amperometro, cioè verso monte, nel secondo caso invece è collegato dopo.

I due modi di collegamento sarebbero indifferenti soltanto nel caso, assolutamente ideale, nel quale l'inserzione dei due strumenti non influenzasse in alcun modo il circuito, cioè nel caso in cui l'amperometro avesse una resistenza nulla, in modo da non provocare una caduta di tensione, e il voltmetro una resistenza interna infinita, in modo da non assorbire corrente.

Nella realtà il voltmetro avrà resistenza interna grande, ma non infinita, quindi richiederà per il suo funzionamento una corrente diversa da zero. D'altro canto l'amperometro avrà resistenza interna piccola, ma certamente non nulla, per cui provocherà ai suoi capi una caduta di tensione  $V_a$  diversa da zero. Di conseguenza si presentano degli effetti sistematici, detti anche errori di consumo dipendenti dal tipo di collegamento prescelto e dalle caratteristiche degli strumenti. Tali effetti possono essere corretti o minimizzati con una scelta oculata sia della strumentazione che dello schema da utilizzare. In generale si può affermare che:

- 1) il voltmetro a valle è preferibile quando si devono misurare resistenze piccole rispetto alla resistenza interna del voltmetro  $R_v$  quindi:

$$R_u < \sqrt{R_a * R_v}$$

- 2) Il voltmetro a monte è preferibile quando si devono determinare resistenze elevate ossia confrontabili con la resistenza  $R_v$  del voltmetro quindi:

$$R_u > \sqrt{R_a * R_v}$$

Dove  $R_u$  è la resistenza da misurare

## 2 Voltmetro a monte dell'amperometro

Si realizza il circuito collegando in serie all'utilizzatore R l'amperometro e poi, in derivazione a tutto, il voltmetro; si alimenta quindi il circuito con una tensione di valore opportuno come da schema figura 2

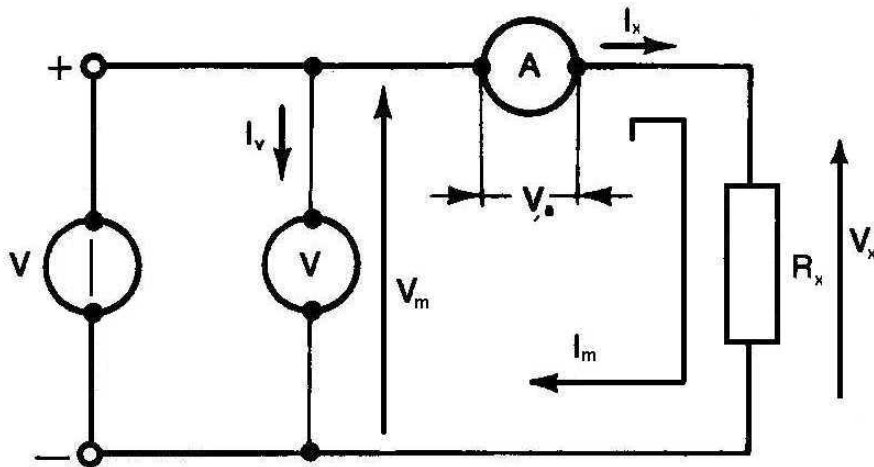


Fig.2- Misura di resistenza con voltmetro a monte dell'amperometro-

Posto:

$V_m$  la tensione misurata

$I_m$  la corrente misurata

Non tenendo conto degli effetti degli strumenti, il valore della resistenza misurata  $R_m$  viene ottenuta dal rapporto tra tensione e corrente:

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} \quad (1)$$

In realtà la resistenza incognita  $R_x$  è percorsa effettivamente da una corrente coincidente con quella indicata dall'amperometro:

$$I_m = I_x \quad (2)$$

La tensione misurata dal voltmetro e  $V_x$  invece quella ai capi della resistenza è :

$$V_m = V_x + V_a \quad (3)$$

sostituendo questi valori nella (1) si ha:

$$R_m = \frac{V_x + V_a}{I_x} = \frac{V_x}{I_x} + \frac{V_a}{I_x} = R_x + R_a \quad (4)$$

Quindi si può definire l'errore di consumo:

$$E_R = R_m - R_x = R_x + R_a - R_x = R_a \quad (5)$$

Quindi l'errore di consumo (cioè l'errore nella misura della resistenza dovuto al consumo dell'amperometro) è pari esattamente alla resistenza interna

dell'amperometro. L'errore relativo  $\left( e_r = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{grandezza misurata}} = \frac{E_R}{R_x} \right)$  è invece pari a:

$$e_r = \frac{R_a}{R_x} \quad (6)$$

Dalla (6) si evince, nel collegamento con voltmetro a monte dell'amperometro, il valore di resistenza calcolato dall'indicatore degli strumenti risulta affetto da un errore relativo dato dal rapporto fra resistenza dell'amperometro e quella del carico. Questo errore sarà tanto minore quanto minore sarà la resistenza dell'amperometro nei riguardi del carico. Per questo motivo si desume che l'inserzione con voltmetro a monte dell'amperometro è consigliabile quando la resistenza da misurare ha valori elevati, mentre è da evitare se la resistenza di carico ha valori bassi, rispetto alla resistenza interna dell'amperometro.

## Valutazione dell'incertezza

Se il valore della resistenza interna del voltmetro è nota, gli effetti sistematici si possono correggere e si può risalire al valore di resistenza corretto  $R_{xc}$  :

$$R_{xc} = R_m - R_a \quad (7)$$

Applicando la legge di propagazione dell' incertezza alla equazione (7) si ha:

$$u_{Rxc}^2 = u_{Rm}^2 + u_{Ra}^2 \quad (8)$$

Per quanto riguarda la resistenza amperometrica  $R_a$ , supponendo nota l'accuracy  $\Delta R_a$  si ha:

$$u_{Ra} = \frac{\Delta R_a}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

Per valutare l'incertezza sulla resistenza  $R_m$  si applica la legge di propagazione dell'incertezza alla relazione (1), quindi:

$$\begin{aligned} u_{Rm}^2 &= \left( \frac{\partial R_m}{\partial I_m} \right)^2 * u_{Im}^2 + \left( \frac{\partial R_m}{\partial V_m} \right)^2 * u_{Vm}^2 = \\ &= \left( -\frac{V_m}{I_m^2} \right)^2 * u_{Im}^2 + \left( \frac{1}{I_m} \right)^2 * u_{Vm}^2 = \left( \frac{V_m}{I_m} \right)^2 * \left[ \frac{u_{Im}^2}{I_m^2} + \frac{u_{Vm}^2}{V_m^2} \right] = R_m^2 * (\dot{u}_{Im}^2 + \dot{u}_{Vm}^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizzando la (8) e la (10) si ricava l'incertezza sul risultato corretto si ha:

$$u_{Rxc}^2 = R_m^2 * (\dot{u}_{Im}^2 + \dot{u}_{Vm}^2) + u_{Ra}^2 \quad (11)$$

### 3 Voltmetro a valle dell'amperometro

Si realizza il circuito collegando il voltmetro direttamente in parallelo al carico  $R_x$  e poi, in serie al parallelo, come da figura:

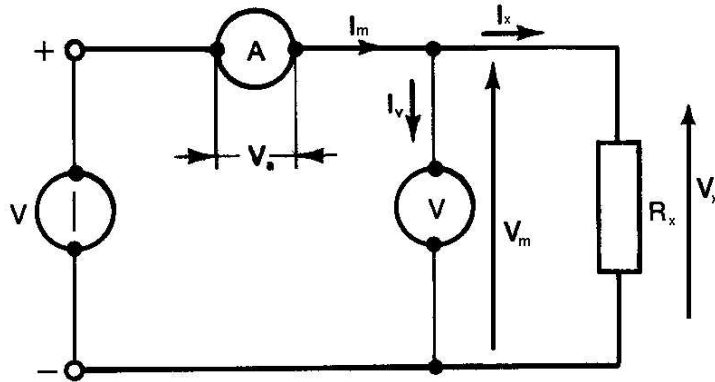


Fig.3 –misura di resistenza con voltmetro a valle dell'amperometro-

Posto:

$V_m$  la tensione misurata

$I_m$  la corrente misurata

Non tenendo conto degli effetti degli strumenti, il valore di resistenza misurato  $R_m$  ancora può essere calcolato da:

$$R_m = \frac{V_m}{I_m}$$

In questo caso la tensione misurata coincide con quella a cui è sottoposta la resistenza incognita,

$$V_m = V_x \tag{12}$$

Viceversa la corrente è data dalla somma delle correnti assorbita dalla resistenza e quella assorbita dal voltmetro:

$$I_m = I_x + I_v \quad (13)$$

Sostituendo la (12) e la (13) nella (1) si ha:

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_x}{I_x + I_v} = \frac{1}{\frac{I_x}{V_x} + \frac{I_v}{V_x}} = \frac{1}{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v}} = \frac{R_x * R_v}{R_x + R_v} \quad (14)$$

quindi la resistenza misurata risulta essere uguale al parallelo di  $R_x$  e  $R_v$ .

In questo caso l'errore assoluto che si commette è pari a:

$$E_R = R_m - R_x = \frac{R_x * R_v}{R_x + R_v} - R_x = -\frac{R_x^2}{R_x + R_v} \quad (15)$$

l'errore relativo è  $e_r = -\frac{E_R}{R_x}$ :

$$e_r = -\frac{R_x}{R_x + R_v} \quad (16)$$

In definitiva dalla (16) si evidenzia che, nel collegamento con voltmetro a valle dell'amperometro, calcolando la resistenza mediante il rapporto fra le indicazioni dei due strumenti, si compie un errore relativo dato dal rapporto fra resistenza del carico e quella interna al voltmetro. Quindi, per poter commettere errori di piccola entità è necessario che la resistenza da misurare abbia valori piccoli in rapporto al valore di quella interna del voltmetro, oppure il che è lo stesso, che la resistenza interna del voltmetro sia sufficientemente grande in confronto a quella da misurare. Quindi, l'inserzione con voltmetro a valle dell'amperometro va scelta per misure di resistenze di basso valore.

## Valutazione dell' incertezza

Se si vogliono correggere gli effetti sistematici bisogna considerare l'equazione (14)

$$R_m = \frac{R_{xc} * R_v}{R_{xc} + R_v} \Rightarrow$$

$$R_{xc} * R_m + R_v * R_m = R_{xc} * R_v$$

$$R_{xc} * (R_v - R_m) = R_v * R_m$$

di conseguenza

$$R_{xc} = \frac{R_v * R_m}{R_v - R_m} \cdot \tag{17}$$

Se si applica la correzione l'incertezza sul dato corretto può essere valutato applicando la legge di propagazione dell'incertezza all' equazione (17).

$$\begin{aligned} u_{R_{xc}}^2 &= \left( \frac{\partial R_{xc}}{\partial R_v} \right)^2 * u_{R_v}^2 + \left( \frac{\partial R_{xc}}{\partial R_m} \right)^2 * u_{R_m}^2 = \\ &= \left[ \frac{R_m * (R_v - R_m) - R_v * R_m}{(R_v - R_m)^2} \right]^2 * u_{R_v}^2 + \left[ \frac{R_v * (R_v - R_m) + R_v * R_m}{(R_v - R_m)^2} \right]^2 * u_{R_m}^2 = \\ &= \frac{R_m^4}{(R_v - R_m)^4} * u_{R_v}^2 + \frac{R_v^4}{(R_v - R_m)^4} * u_{R_m}^2 \cdot \end{aligned}$$

L'incertezza di  $R_v$  deve essere fornita dal costruttore mentre l'incertezza di  $R_m$  è calcolata come combinazione delle incertezze delle misure di tensione e corrente.



#### 4 Considerazioni sulla scelta della configurazione

Se non si intende correggere gli errori di consumo, la scelta della configurazione più adatta dipende dal valore della resistenza incognita: se  $R_x$  è piccola si preferisce l'inserzione con il voltmetro a valle altrimenti l'inserzione con il voltmetro a monte. Per avere un'indicazione quantitativa sulla configurazione da impiegare si considerano gli errori relativi:

- per il voltmetro a monte,  $e_{\text{monte}} = \frac{R_a}{R_x}$

- per il voltmetro, a valle,  $e_{\text{valle}} = \frac{R_x}{R_x + R_v}$

A questo punto si può valutare quella resistenza  $R_x^*$  tale che i due errori si equivalgano: se  $R_x$  risulta maggiore di questa resistenza va impiegata l'inserzione a monte altrimenti va scelta quella a valle.

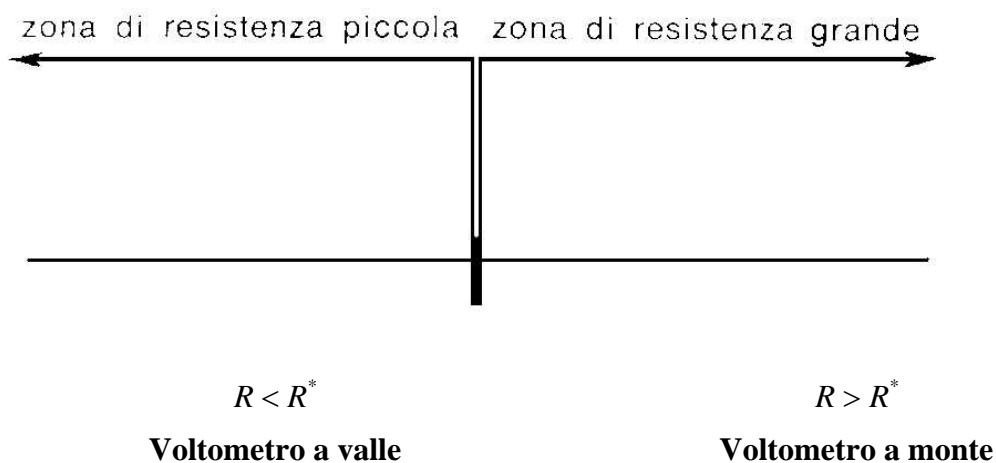


Fig. 4 - Diagramma di determinazione tra resistenze grandi e piccole -

**Infine, per resistenze di valore prossimo a  $R^*$  la configurazione da utilizzare è quella per la quale la correzione richiede la conoscenza della resistenza il cui valore è noto con incertezza minore.**

**Per il calcolo di questo valore di soglia  $R^*$ , basta porre:**

$$\frac{R_a}{R_x^*} = \frac{R_x^*}{R_x^* + R_v}$$

$$R_x^* \cdot R_a + R_a \cdot R_v = (R_x^*)^2$$

**da cui:**

$$R_x^* \cong \sqrt{R_a \cdot R_v} .$$

**Si conclude che la media geometrica delle resistenze interne dei due strumenti costituisce un valore di separazione fra la zona delle resistenze di piccolo valore e quella delle resistenze di elevato valore ( figura 4).**