

## ***La taratura degli strumenti di misura***

L'importanza dell'operazione di taratura nasce dall'esigenza di rendere il risultato di una misura riferibile ai campioni nazionali od internazionali del misurando in questione affinché più misure di uno stesso oggetto, effettuate in tempi e luoghi diversi, siano confrontabili tra di loro.

Nella maggior parte dei casi pratici, la misurazione di una grandezza è eseguita con l'obiettivo di confrontare la misura ottenuta con altre misure ottenute da soggetti diversi, in ambiti diversi, impiegando apparecchiature diverse. Questo accade, per esempio, per stabilire se il diametro di un pistone ha un valore adeguato al corrispondente cilindro, oppure se le dimensioni di una scrivania sono adeguate allo spazio che abbiamo a disposizione nel nostro ufficio. In altre situazioni, è necessario confrontare le misure ottenute con valori di riferimento forniti da norme o regolamenti, come quando si verifica se le emissioni elettromagnetiche prodotte da un dispositivo elettronico sono inferiori a limiti prestabiliti oppure se la concentrazione di un gas inquinante nell'aria supera una certa soglia di allarme.

In ogni caso, affinché questi confronti abbiano senso, risulta indispensabile che le misure siano ottenute mediante dispositivi strettamente correlati ai campioni primari, ossia mediante dispositivi *riferibili*. La riferibilità è definita come *la proprietà che strumenti e campioni acquisiscono quando sono sottoposti a taratura a fronte di campioni riconosciuti come primari in un determinato contesto*.

### **1. Organizzazione delle attività metrologiche**

In molti Paesi, tra cui l'Italia, la metrologia investe due ambiti distinti, ciascuno con specificità ed esigenze proprie: la metrologia scientifica e tecnica e la metrologia legale.

La prima ha il compito di rendere disponibili, nelle attività scientifiche, tecniche ed industriali i campioni primari delle unità di misura delle diverse grandezze fisiche, in accordo con la definizione che per ciascuna di esse è data dal Sistema Internazionale delle Unità (SI). Questo compito è affidato, a livello più alto in ciascun Paese, a Istituti nazionali di metrologia, i quali sono chiamati a garantire la riferibilità non solo nell'ambito nazionale, ma anche nei confronti di altri Paesi e, più in generale, a livello internazionale.

Il compito della metrologia legale è quello di verificare che tutti gli strumenti di misura impiegati nelle transazioni commerciali (bilance meccaniche ed elettroniche, misuratori di carburanti liquidi, contatori di volume di gas, strumenti per misure lineari, cronotachigrafi, ecc...) o per i quali specifiche disposizioni legislative prevedono ben definiti requisiti di riferibilità e di affidabilità, rispondano ai requisiti previsti dalla legislazione vigente o in documenti normativi concordati nell'ambito dell'*Organizzazione Internazionale di Metrologia legale (OIML)*.

I compiti di metrologia legale sono svolti, per quanto concerne l'Italia, alle dipendenze del Ministero dell'Industria, del Commercio e dell'Artigianato, dall'Ufficio Centrale Metrico e da Uffici decentrati a livello provinciale, presso le Camere di Commercio.

### *1.1. La metrologia scientifica e tecnica*

La metrologia scientifica e tecnica, deve:

- realizzare un'unità, cioè determinare, basandosi sulla sua definizione, il valore da assegnare, con l'incertezza minima consentita dalle tecniche disponibili, al parametro principale di un singolo o, meglio, di un gruppo di campioni materiali con caratteristiche elevate e paragonabili tra loro;
- riprodurre un'unità; in sostanza, significa aggiornare la realizzazione di un'unità di misura secondo raccomandazioni concordate e adottate a livello internazionale;
- mantenere un'unità, vale a dire mettere in punto un complesso sperimentale, costituito dai campioni suddetti e da strumenti di misura, che sia in grado di garantire costantemente la disponibilità dell'unità tra le sue successive realizzazioni o riproduzioni;
- disseminare un'unità, cioè significa individuare i metodi e i mezzi necessari perché le misure di una grandezza fisica, ottenute da una molteplicità di utilizzatori, in determinati campi di misura e con assegnati livelli d'incertezza, siano riferite al campione primario realizzato in un certo ambito geografico da un Istituto nazionale di metrologia oppure al campione adottato come nazionale nel medesimo ambito geografico.

Di norma agli Istituti nazionali di metrologia si richiedono un continuo lavoro di messa a punto di nuove metodologie di misura, il progetto e la costruzione di nuovi strumenti e sistemi, l'estensione dei campi di misura delle diverse grandezze e una riduzione dei relativi livelli d'incertezza. Tutto ciò è conseguente all'acquisizione di nuove conoscenze fisiche, alla disponibilità di tecnologie più avanzate e alle maggiori e più impegnative richieste di riferibilità degli utilizzatori; queste ultime sono collegate, a loro volta, con l'esigenza di migliorare la qualità e l'affidabilità dei prodotti, dei servizi e dei processi nei settori di specifico interesse.

Gli Istituti Metrologici nazionali sono incaricati di mantenere i collegamenti con gli organismi internazionali e di svolgere attività di ricerca e di sostegno all'industria nazionale nell'ambito della metrologia, in Italia sono presenti tre diversi Istituti:

- l'Istituto di Metrologia "Gustavo Colonnetti" (**IMGC**) del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) per i campioni delle unità di misura impiegate nel campo della meccanica e della termologia (unità di massa, lunghezza, temperatura e forza);
- l'Istituto Elettrotecnico Nazionale "Galileo Ferraris" (**IEN**) per i campioni riguardanti le unità di misura del tempo e delle frequenze e per le unità di misura impiegate nel campo dell'elettricità, della fotometria, dell'optometria e dell'acustica;
- l'Istituto Nazionale di Metrologia delle Radiazioni Ionizzanti (**INMRI**) dell'Ente per le Nuove Tecnologie, l'Energia e l'Ambiente (**ENEA**) per i campioni delle unità di misura impiegate nel campo delle radiazioni ionizzanti.

Fra i compiti fondamentali della metrologia scientifica, e quindi degli istituti metrologici primari, come già detto, sono da annoverare non solo la ricerca nel campo della misura, lo studio di nuovi campioni di unità di misura, la realizzazione dei campioni primari delle unità di misura del Sistema internazionale (SI), ma anche la conservazione e la disseminazione dei predetti campioni in via diretta, mediante la taratura e la certificazione di campioni e strumenti metrici.

In Italia, con la legge n. 273 dell'11 agosto 1991 è stato istituito il *Sistema Nazionale di Taratura* (**SNT**). Costituzione e compiti del SNT sono così definiti dalla legge:

“il sistema nazionale di taratura è costituito dagli istituti metrologici primari e dai centri di taratura, e ha il compito di assicurare la riferibilità ai campioni nazionali dei risultati delle misurazioni”.

Nell'istituire il Sistema Nazionale di Taratura (SNT), la legge 273/91 ha confermato agli Istituti metrologici primari (IMP) il compito di conservare i campioni nazionali, verificarne la coerenza con quelli di altri paesi, e disseminare le unità SI realizzate per mezzo di detti campioni, direttamente o tramite i Centri di taratura convenzionati, assicurando il riferimento metrologico indispensabile per le attività industriali e commerciali.

La disseminazione viene realizzata, quindi, mediante una catena metrologica che lega gli istituti metrologici primari ai laboratori secondari, sia pubblici sia privati, denominati Centri di Taratura SIT (Servizio di Taratura in Italia), che con varie funzioni operano nel campo della metrologia. Centri di Taratura sono laboratori di idonea capacità tecnica ed organizzativa che hanno stipulato delle convenzioni con gli Istituti Metrologici primari, per poter effettuare le tarature di strumenti di misura sulla base di campioni secondari che sono confrontati periodicamente con quelli nazionali. Questi confronti periodici sono preceduti da una complessa azione di esame e di valutazione delle capacità tecniche ed organizzative del Centro.

## 2. La riferibilità

Come già detto in precedenza, prototipi e realizzazioni sperimentali dell'unità costituiscono i campioni primari al cui mantenimento o realizzazione si impegnano il BIPM e alcuni altri laboratori nazionali. Spesso per comodità gli stessi laboratori utilizzano dei campioni secondari che tuttavia devono essere periodicamente confrontati con i primari, perché essi non realizzano direttamente l'unità e sono soggetti a errori (polarizzazioni) non controllabili in modo diretto e a derive nel tempo. Questi processi di confronto sono anche detti tarature. La taratura consiste nel confronto di uno strumento con un altro, di migliore qualità, ottenendo un insieme di dati di correzione per le letture dello strumento tarato. In questo modo è possibile ottenere per lo strumento tarato una incertezza residua minore di quella precedentemente assegnatagli. Prima di eseguire la taratura è necessario tenere presente il livello di accuratezza desiderato per lo strumento in prova (accuratezza che deve essere commisurata alla sua stabilità nel tempo), utilizzare un riferimento di livello adeguatamente superiore, e usare un metodo di confronto che permetta il conseguimento dell'accuratezza stabilita.

In generale, affinché l'operazione di taratura porti a una stima affidabile dell'incertezza che caratterizza lo strumento da tarare, si accetta convenzionalmente che lo strumento di riferimento debba essere caratterizzato da una sua incertezza intrinseca almeno quattro volte inferiore a quella dello strumento in prova. Un rapporto di dieci a uno tra le incertezze dei due strumenti è considerato pienamente soddisfacente.

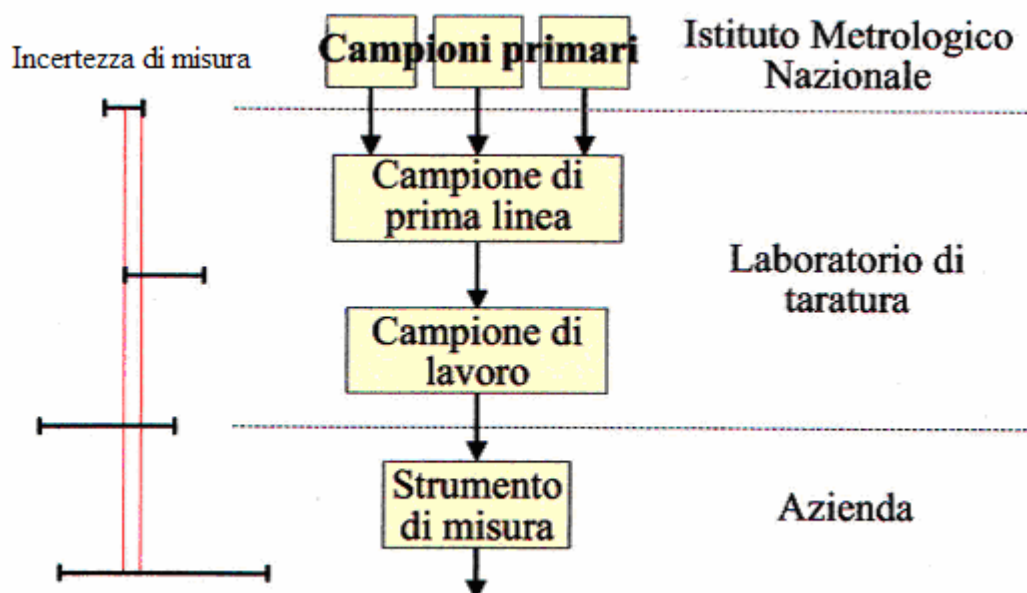


Fig.1: Esempio di catena di riferibilità

I dispositivi per misurazione devono quindi essere “legati” ai campioni primari nazionali od internazionali attraverso una catena ininterrotta di confronti, detta *catena di riferibilità*, in ciascuno dei quali deve essere dichiarata l’incertezza di misura. Un esempio di catena di riferibilità è mostrato in figura, dove si osserva che le fasce di valore diventano sempre più ampie quanto più ci si sposta verso il basso, in quanto ogni confronto che “trasferisce la riferibilità” dai campioni primari agli altri dispositivi aggiunge necessariamente incertezza.

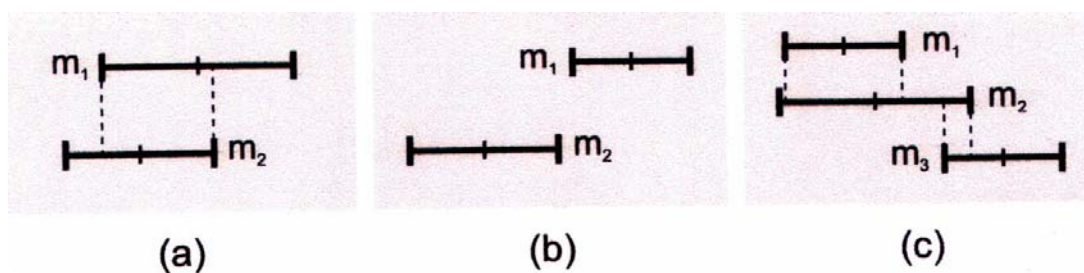
### 3. *Compatibilità delle misure*

Spesso risulta necessario confrontare misure diverse della stessa grandezza per verificarne la congruenza. Questo non può ovviamente essere interpretato come verifica dell’uguaglianza tra due numeri, visto che una misura è costituita da un intervallo di valori. Si ricorre perciò al concetto di *compatibilità*, definito come la *condizione che si verifica quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura dello stesso parametro nello stesso stato hanno almeno un elemento in comune*.

La definizione mette in evidenza il fatto che il confronto tra due o più misure ha senso solo quando le misure si riferiscono allo stesso misurando nello stesso stato del sistema in misura. Qualora si volessero confrontare misure ottenute in differenti stati del sistema, sarebbe prima necessario riferire le misure allo stesso stato, impiegando un opportuno modello matematico che descrive la dipendenza del misurando dalle grandezze che definiscono lo stato del sistema.

Si osservi, inoltre, che per verificare la condizione di compatibilità tra due misure è necessario, che le misure siano state ottenute a partire da strumenti e campioni riferibili; inoltre:

- devono essere individuati e corretti eventuali effetti sistematici che influenzano in modo significativo le misure;
- deve essere impiegato lo stesso metodo per la stima dell’incertezza di misura;
- devono essere considerati tutti i contributi di incertezza significativi, tra i quali vi è spesso l’effetto dell’operatore.



**Fig.2: Esempio di confronto tra misure per la verifica della compatibilità**

In Fig. 2 sono mostrate, ad esempio, tre possibili situazioni derivanti dal confronto tra misure, le misure di Fig. 2.a mostra una condizione di compatibilità tra le misure  $m_1$  e  $m_2$ , mentre nella Fig. 2.b è mostrata una situazione di non compatibilità. Come si ricava anche dalla Fig. 2.c la compatibilità non gode della proprietà transitiva: la compatibilità tra  $m_1$  e  $m_2$  e tra  $m_2$  e  $m_3$  non implica la compatibilità tra  $m_1$  e  $m_3$ .

Alternativamente si può affermare che due misure,  $m_1$  e  $m_2$ , sono compatibili con un dato livello di confidenza se la loro differenza è inferiore all'incertezza estesa della differenza stessa:

$$|m_1 - m_2| \leq U(|m_1 - m_2|)$$

#### 4. Taratura di uno strumento di misura

Il diagramma di taratura è la relazione che permette di ricavare da ogni valore della grandezza di uscita,  $L_0$ , la corrispondente fascia di valori ragionevolmente attribuibili al misurando,  $\Delta M$ . L'informazione completa viene di solito fornita specificando separatamente (in forma grafica, tabulare, o analitica) dove si colloca la fascia di valore, mediante un punto situato in posizione intermedia nella fascia, e l'ampiezza della fascia stessa. La taratura è solitamente svolta dal costruttore prima di affidare il dispositivo all'utilizzatore, anche se in alcuni casi, soprattutto per i campioni, il costruttore fornisce dispositivi non tarati; in questo caso è l'utilizzatore che deve provvedere all'operazione di taratura.

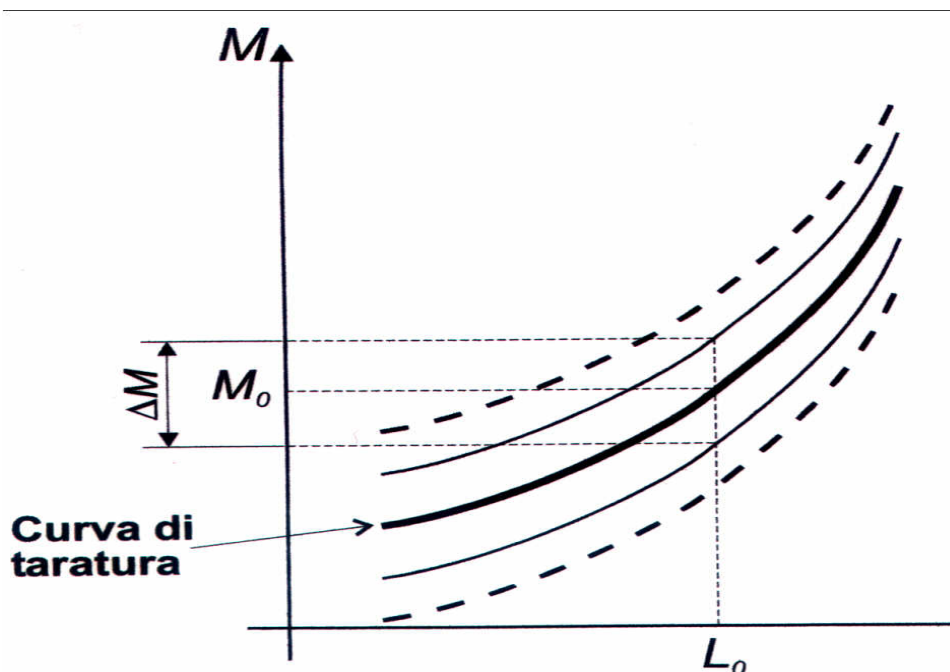


Fig. 3: Esempio di diagramma funzione di taratura

Si distinguono dunque i due seguenti tipi di informazione:

- i. *Curva di taratura*: può inglobare tutte le caratteristiche della precisione. E' la relazione biunivoca (o almeno univoca) tra ogni valore della grandezza di uscita e il corrispondente valore da assegnare al punto centrale della fascia di valore relativa al misurando. Quando la curva di taratura è una retta, cioè esiste una relazione di proporzionalità fra uscita e misurando, essa viene espressa di regola con un coefficiente chiamato *costante di taratura*.
- ii. *Incertezza di taratura*: E' la larghezza della fascia di valore. Può essere specificata:
  - in valore assoluto, con la stessa unità di misura del misurando;
  - in valore relativo, rapportandola al valore del punto intermedio della fascia a cui è associata;
  - in valore ridotto, rapportandola a un determinato valore del campo di misura, di solito il limite superiore.

Dalla funzione di taratura possono essere ricavate alcune caratteristiche, spesso forniti anche separatamente:

- a) Sensibilità: la *sensibilità*, che può essere definita con riferimento a un punto qualsiasi della curva di taratura e coincide con l'inverso della pendenza della curva stessa. Nel caso particolare in cui la curva di taratura è una retta, la sensibilità è pari all'inverso della costante di taratura. Essa è dunque espressa con riferimento alle unità di misura del misurando e della grandezza d'uscita; ad esempio, in un sensore di forza con uscita in tensione, in volt/newton.
- b) Linearità: E' un'indicazione di quanto la curva di taratura si discosta dall'andamento rettilineo. E' specificata fornendo il valore massimo dello scostamento dei singoli punti della curva di taratura da una retta di riferimento opportunamente definita. Si definiscono dunque tanti tipi di linearità quanti sono i modi di scegliere la retta di riferimento, ma quale che sia la retta a cui si fa riferimento, la linearità, cioè il massimo scostamento, viene espressa di regola o in valore relativo o, più spesso, in valore ridotto. Le definizioni utilizzate per la retta di riferimento sono le seguenti:
  - *Linearità riferita allo zero*: La retta di riferimento passa per l'estremo inferiore della curva di taratura, corrispondente all'estremo inferiore del campo di misura, ed è tracciata in modo da rendere minimo il più elevato (in valore assoluto) degli scostamenti.
  - *Linearità riferita agli estremi*: La retta di riferimento congiunge i due estremi della curva di taratura corrispondenti ai due estremi del campo di misura.
  - *Linearità indipendente*: La retta di riferimento è quella che rende minimo il più elevato (in valore assoluto) degli scostamenti.

- *Linearità secondo i minimi quadrati*: La retta di riferimento è quella che corrisponde al valor minimo della somma dei quadrati degli scostamenti. Maggiori dettagli a riguardo sono riportati nell'appendice B.

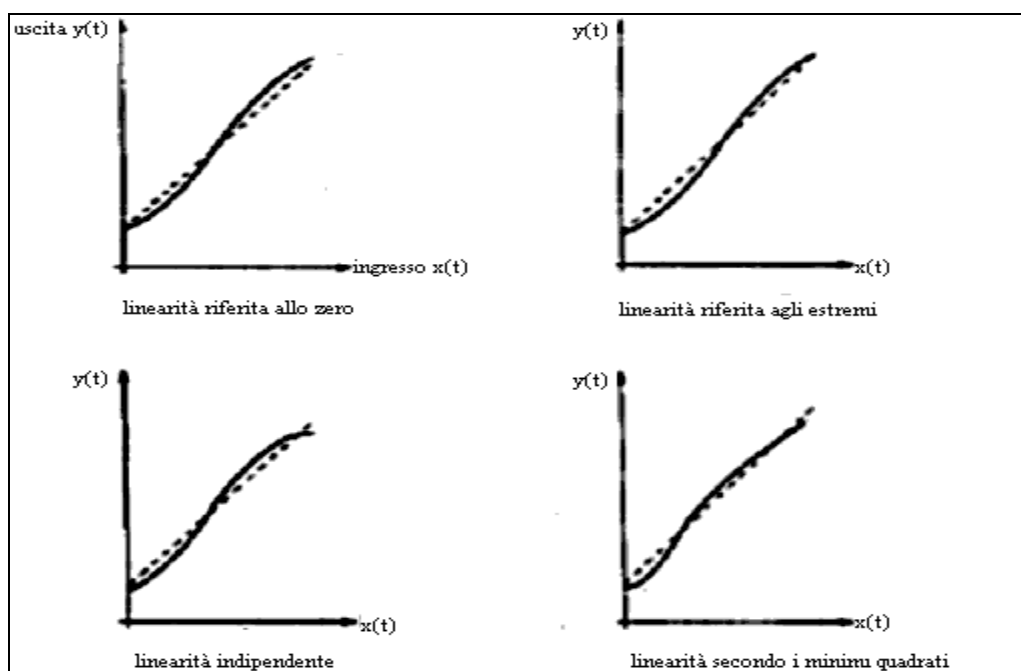


Fig.4 Esempio di rette di riferimento per valutare la linearità della curva di taratura

- c) Isteresi: Indica la tendenza di uno strumento di fornire valori di lettura diversi in corrispondenza dello stesso misurando, quando questo è fatto variare per valori crescenti o decrescenti. Essa viene valutata come la massima differenza fra i valori della grandezza d'uscita corrispondenti al medesimo misurando, quando si considerano tutti i possibili valori entro il campo di misura, ed ogni valore viene raggiunto, prima partendo dall'estremo inferiore, poi partendo dall'estremo superiore.

L'isteresi viene espressa specificando la variazione massima che si può verificare nell'uscita, in valore assoluto o in percentuale della portata, a parità di misurando e di condizioni operative, entro un determinato intervallo di tempo.

## 5. Controllo di taratura e messa a punto di uno strumento di misura

Le prestazioni metrologiche di uno strumento di misura sono solitamente garantite dal costruttore per un determinato intervallo di tempo. Spesso il tempo trascorso dall'operazione di taratura è considerata una grandezza di influenza ed allo strumento sono assegnati diagrammi di taratura differenti, per esempio, a 90 giorni, a 1 anno ed a 2 anni dalla taratura. Il costruttore fornisce anche un'indicazione riguardo al massimo intervallo di tempo dalla taratura entro cui lo



strumento è in grado di fornire misure secondo un diagramma di taratura assegnato. Superato questo intervallo di tempo, è indispensabile che lo strumento sia sottoposto a *controllo di taratura*, ossia ad un'operazione che permette di controllare se le letture fornite da uno strumento in corrispondenza di una serie di misurandi noti sono contenute entro un diagramma di taratura preassegnato. Durante questa operazione, le grandezze di influenza devono essere comprese nei campi per cui è dichiarato il diagramma di taratura dello strumento.

L'esecuzione del controllo di taratura richiede quindi di disporre dei campioni che realizzano la serie di misurandi da applicare all'ingresso dello strumento; questi misurandi devono inoltre essere realizzati con un'incertezza "trascurabile" rispetto all'incertezza fornita dallo strumento sottoposto a taratura. Quando l'esito del controllo è negativo, risulta probabile che lo strumento non sia più in grado di fornire misure secondo il diagramma di taratura preassegnato. In questo caso risulta indispensabile ricorrere alla *messa a punto* dello strumento, ossia ad un insieme di operazioni automatiche o parzialmente manuali (o totalmente manuali nel caso di strumenti non dotati di proprie capacità di elaborazione) che impongono allo strumento di fornire particolari letture in corrispondenza a particolari misurandi applicati al suo ingresso.

Un esempio di messa a punto è quello che porta a determinare e spesso correggere l'errore di zero in uno strumento, in altre parole la sua indicazione quando al suo ingresso non è applicata la grandezza cui è sensibile. Una volta determinata l'entità dell'errore di zero (*offset*), essa solitamente può venire automaticamente compensata dallo strumento, sottraendola (algebricamente) al valore del misurando, fornendo così all'operatore la misura già corretta. Altra tipica operazione di messa a punto che può essere effettuata da uno strumento evoluto è quella della correzione del suo *fattore di scala*, che è il fattore di proporzionalità tra la grandezza di ingresso e il corrispondente valore di misura in uscita. Applicando all'ingresso una quantità o un segnale di riferimento (campione di adeguate caratteristiche metrologiche) e predisponendo opportunamente lo strumento, quest'ultimo può confrontare la sua lettura con il valore di riferimento e correggere il fattore di scala affinché lettura e valore di riferimento vengano a coincidere. Operazioni di messa a punto di questo tipo vengono normalmente eseguite da strumenti quali bilance elettroniche, multimetri elettronici, ecc... In seguito all'operazione di messa a punto, lo strumento può nuovamente fornire misure secondo il diagramma di taratura preassegnato.

E' importante non confondere il processo di messa a punto con quello di taratura: il primo garantisce solo la miglior predisposizione dello strumento affinché possa effettuare al meglio delle sue capacità le misure, ma non fornisce alcuna informazione sulle caratteristiche metrologiche dello strumento (incertezza); l'operazione di taratura è finalizzata invece a fornire proprio queste ultime informazioni.

Solitamente, alla messa a punto segue un controllo di taratura, che ha lo scopo di accertare la validità del diagramma di taratura dello strumento e quindi la buona riuscita della messa a punto.

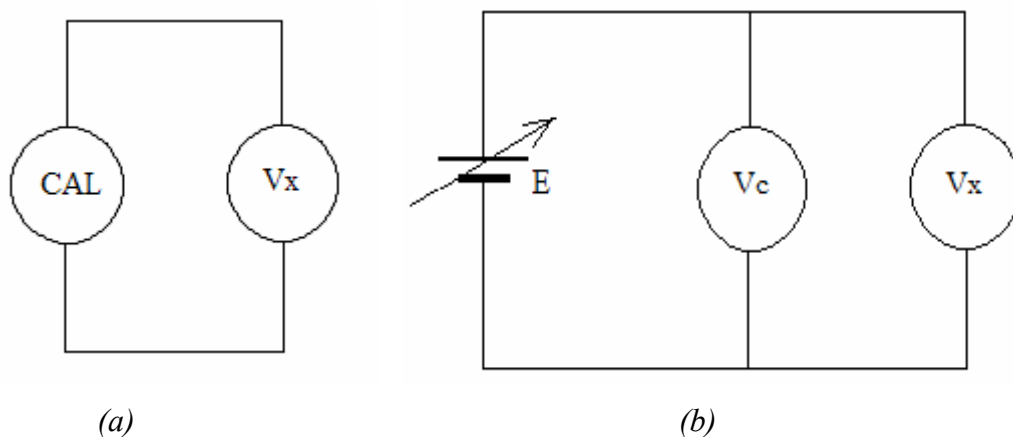
## 2.8 Esecuzione della taratura

Nell'esecuzione di una *taratura statica* tutti gli ingressi (desiderati, interferenti, modificanti) eccetto uno sono fissati a valori costanti. Di conseguenza anche le uscite variano con valori costanti all'interno di un certo campo. Le relazioni tra ingresso e uscita sviluppate in questo modo costituiscono una taratura statica valida sotto le fissate condizioni di costanza di tutti gli altri ingressi.

Durante il processo di taratura l'ingresso applicato, che deve essere noto con incertezza inferiore di almeno un ordine di grandezza rispetto all'incertezza del sistema sottoposto a taratura, viene fatto variare in un certo campo e si registrano le relative misure fornite dallo strumento da tarare.

L'operazione di taratura può essere effettuata (vedi Fig .5):

- fornendo un ingresso noto mediante un calibratore, cioè un generatore di tensione, o corrente, continua di elevata precisione;
- oppure facendo variare l'ingresso ed effettuare la taratura per confronto mediante uno strumento campione.



**Fig.5: Esempi circuitali per la taratura di un voltmetro**

Per entrambe le soluzioni adottate, una singola misurazione per ogni livello di tensione è caratterizzata da uno scostamento rispetto al valore fornito in ingresso ( $\Delta V = V_{out} - V_{in}$ ) che ha due componenti: una aleatoria ed una sistematica. Come è noto, per ridurre la variabilità casuale del risultato di una misurazione bisogna aumentare il numero di osservazioni e considerare il valore medio osservato nelle prove ripetute. In questo modo lo scostamento tra il valore medio delle misure ed il valore in ingresso è dovuto solo ad effetti sistematici.

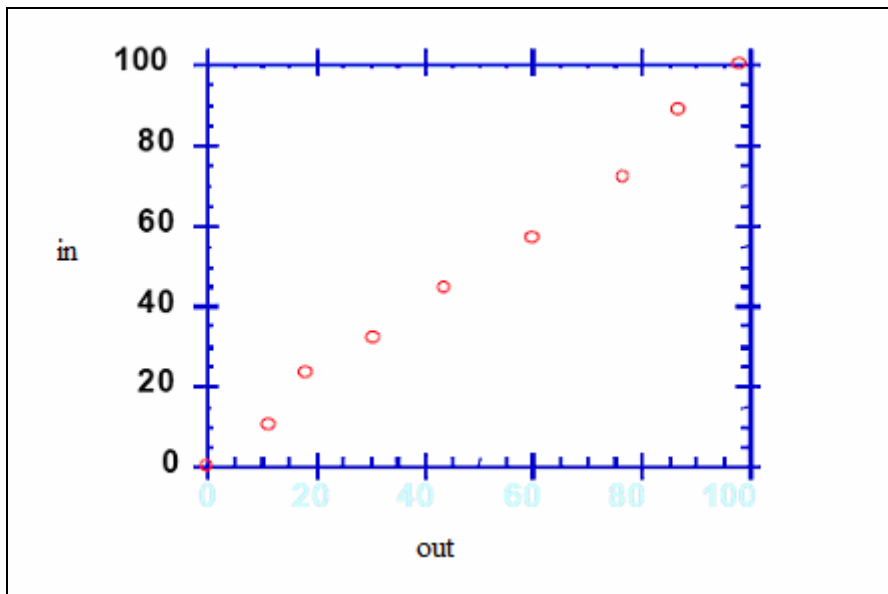
Per ciò che concerne la variazione dell'ingresso si utilizza un passo costante dell'intervallo di taratura; se l'intervallo scelto viene coperto sia per valori crescenti che per valori decrescenti, è

possibile evidenziare eventuali effetti di isteresi sullo strumento.

Per poter valutare eventuali effetti sistematici bisogna calcolare il valore medio dei valori misurati in corrispondenza di uno stesso ingresso: lo scostamento tra la media,  $\bar{x}$ , e l'ingresso rappresenta l'errore che commette lo strumento nella misura di quel valore. Lo scarto tipo sperimentale,  $s$ , invece, consente di ricavare l'incertezza della taratura. In particolare il diagramma di taratura può essere ricavato considerando le medie e gli scarti tipo. Rappresentando i dati raccolti su di un piano cartesiano mettendo in ascissa i valori letti e sulle ordinate i corrispondenti valori di ingresso, si ha che la curva che unisce i valori medi dei valori misurati rappresenta la curva di taratura, mentre le altre due curve possono essere ricavate unendo i valori . Inoltre il diagramma di taratura può essere costruito considerando le curve che uniscono:  $\bar{x}+ks$  e  $\bar{x}-ks$  dove il fattore di copertura  $k$  va scelto in funzione del livello di confidenza e della distribuzione che meglio modella il processo di misurazione.

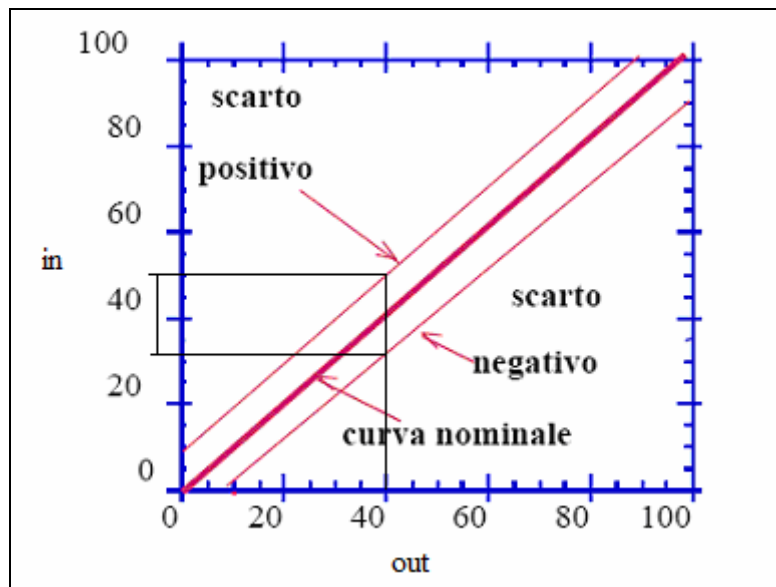
Lo scopo è quello di ottenere la *curva di taratura*, dalla quale è possibile determinare tutti i parametri d'interesse.

Innanzitutto è possibile riportare in un diagramma cartesiano i valori medi dell'ingresso corrispondenti delle diverse letture sullo strumento da tarare.



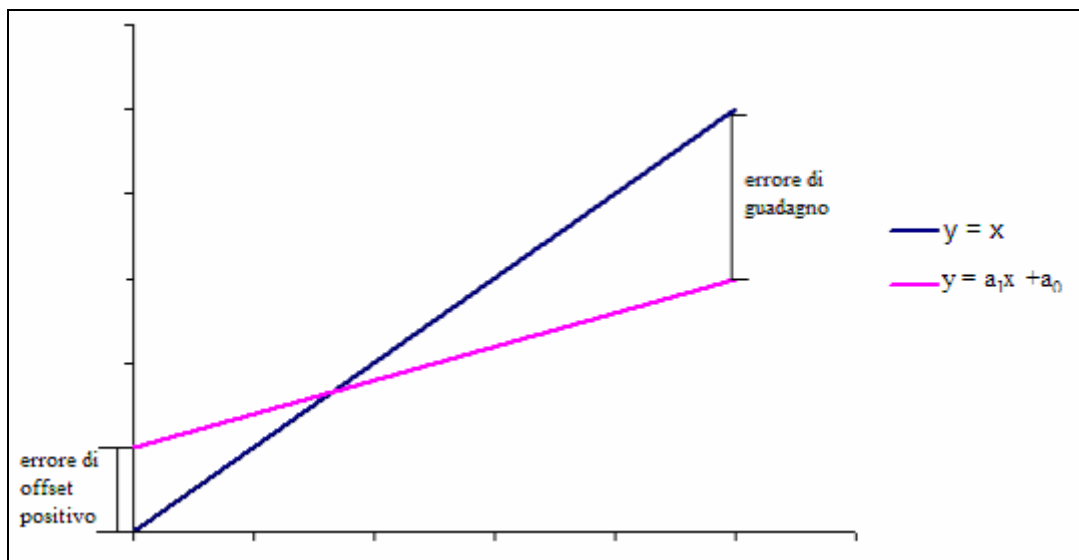
**Fig.6: Rappresentazione dei valori medi**

Ad esempio in Fig.7 sono riportati la curva ed il diagramma di taratura ipotizzando un comportamento lineare dello strumento, e considerando le rette calcolate col metodo dei minimi quadrati, considerando i valori medi e un fattore di copertura pari a 3.



**Fig. 7: Esempio di diagramma di taratura**

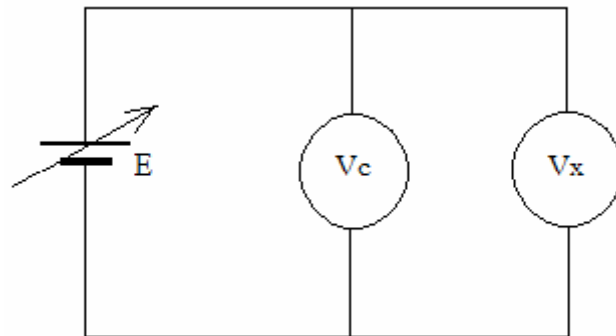
E' possibile valutare la presenza di effetti sistematici confrontando la retta dei valori medi con quella ideale ( $y = x$ ), cioè con la retta avente offset pari a zero e pendenza di  $45^\circ$ ; così facendo si determinano l'errore di offset, in corrispondenza dell'intercetta della retta, e l'errore di guadagno, legato al coefficiente angolare della stessa.



**Fig. 8: Curve di taratura ideale ( $y = x$ ) e reale ( $y = a_1x + a_0$ )**

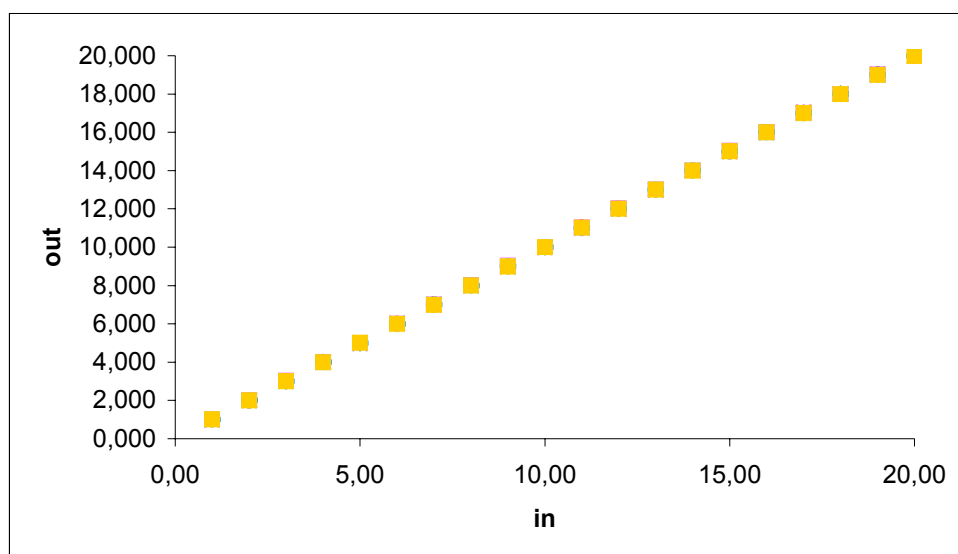
## 2.8 Esempio di taratura di un voltmetro

In Fig. 9 è riportato il circuito per realizzare la taratura di un voltmetro.  $E$  rappresenta un alimentatore variabile,  $V_c$  un voltmetro campione e  $V_x$  il voltmetro da tarare.



**Fig. 9: Circuito per la taratura di un voltmetro.**

Dopo aver montato il circuito, sono effettuate le misure di tensione con i due voltmetri. In particolare, variando il valore dell'alimentazione, si fa in modo da ottenere sul voltmetro incognito il valore "esatto" per ogni punto (ad esempio: 1.00V, 2.00V, ecc.), mentre il valore di tensione riportato sul voltmetro campione rappresenta il valore realmente erogato. Inoltre si deve precisare che le misure non si fanno per un unico punto, ma bisogna esaminare il comportamento dello strumento su tutti i valori di tensione dal valore minimo fino a quello di fondo scala; si procede al rilevamento dei valori di tensione da 1V a 20V, con passo di 1V, ripetendo la serie di misure più volte (in questo caso 20) a causa degli effetti aleatori e sistematici della misura, procedendo sia per *letture in salita* (10), cioè dal valore minimo al valore massimo, sia per *letture in discesa* (10), cioè dal valore massimo a quello minimo (per evidenziare eventuali effetti di isteresi).



**Fig. 10: Valori misurati**

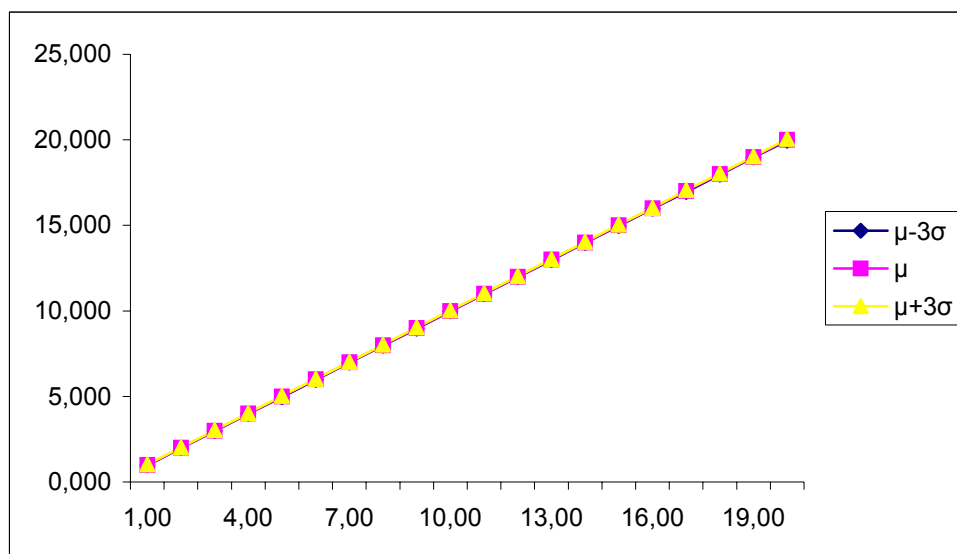
Per poter evidenziare gli effetti sistematici, innanzitutto, per ogni punto di riferimento sono valutati il valore medio  $\mu$  e la deviazione standard  $\sigma$ , i cui valori sono riportati nella tabella I:

	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
$\mu$	1,000	2,005	3,003	4,003	4,998	5,998	7,001	7,999	9,003	9,999
$\sigma$	0,0105	0,0066	0,0103	0,0077	0,0106	0,0116	0,0069	0,0089	0,0104	0,0092

	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00	19,00	20,00
$\mu$	11,005	12,003	13,002	14,002	15,006	15,999	17,007	18,001	19,000	20,005
$\sigma$	0,0087	0,0104	0,0094	0,0109	0,0121	0,0075	0,0191	0,0117	0,0099	0,0165

**Tab. I: Valore medio e deviazione standard dei punti di taratura**

Una volta noti questi valori, è possibile ottenere il diagramma di taratura riportante le curve, ottenute per interpolazione lineare da punto a punto, di  $\mu$ ,  $\mu-3\sigma$  e  $\mu+3\sigma$ .



**Fig. 11: Curva di taratura**

Dal diagramma di taratura, entrando col valore letto, si può determinare la fascia di valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

Per determinare l'equazione della retta reale,  $y = mx + b$ , si utilizza la tecnica dei minimi quadrati ricavando  $m = 1,000098$  e  $b = 0,000919$  per cui i valori per ogni punto della retta ai minimi quadrati sono riportati in Tab. II

	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
<b>Lin-3<math>\sigma_{\max}</math></b>	0,9429	1,943	2,9431	3,9432	4,9433	5,9434	6,9435	7,9436	8,9437	9,9438
<b>Lin</b>	1,0001	2,0002	3,0003	4,0004	5,0005	6,0006	7,0007	8,0008	9,0009	10,001
<b>Lin+3<math>\sigma_{\max}</math></b>	1,0573	2,0574	3,0575	4,0576	5,0577	6,0578	7,0579	8,058	9,0581	10,058

	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00	19,00	20,00
<b>Lin-3<math>\sigma_{\max}</math></b>	10,944	11,944	12,944	13,944	14,944	15,944	16,944	17,945	18,945	19,945
<b>Lin</b>	11,001	12,001	13,001	14,001	15,001	16,002	17,002	18,002	19,002	20,002
<b>Lin+3<math>\sigma_{\max}</math></b>	11,058	12,058	13,058	14,059	15,059	16,059	17,059	18,059	19,059	20,059

**Tab. II Valori della curva di regressione**

Lo scostamento, punto per punto, della curva di regressione dalla retta ideale è:

	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
<b>E<sub>lin-3<math>\sigma_{\max}</math></sub></b>	-0,0573	-0,0574	-0,0575	-0,0576	-0,0577	-0,0578	-0,0579	-0,0580	-0,0581	-0,0582
<b>E<sub>lin</sub></b>	-0,0001	-0,0002	-0,0003	-0,0004	-0,0005	-0,0006	-0,0007	-0,0008	-0,0009	-0,0010
<b>E<sub>lin+3<math>\sigma_{\max}</math></sub></b>	0,0571	0,0570	0,0569	0,0568	0,0567	0,0566	0,0565	0,0564	0,0563	0,0562

	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00	19,00	20,00
<b>E<sub>lin-3<math>\sigma_{\max}</math></sub></b>	-0,0583	-0,0584	-0,0585	-0,0586	-0,0587	-0,0588	-0,0589	-0,0590	-0,0591	-0,0592
<b>E<sub>lin</sub></b>	-0,0011	-0,0012	-0,0013	-0,0014	-0,0015	-0,0016	-0,0017	-0,0018	-0,0019	-0,0020
<b>E<sub>lin+3<math>\sigma_{\max}</math></sub></b>	0,0561	0,0561	0,0560	0,0559	0,0558	0,0557	0,0556	0,0555	0,0554	0,0553

**Tab. III Scostamento della curva di regressione dalla retta ideale**

L'errore di non linearità, definito come il valore assoluto della differenza tra i valori della curva lineare dai valori medi, è:

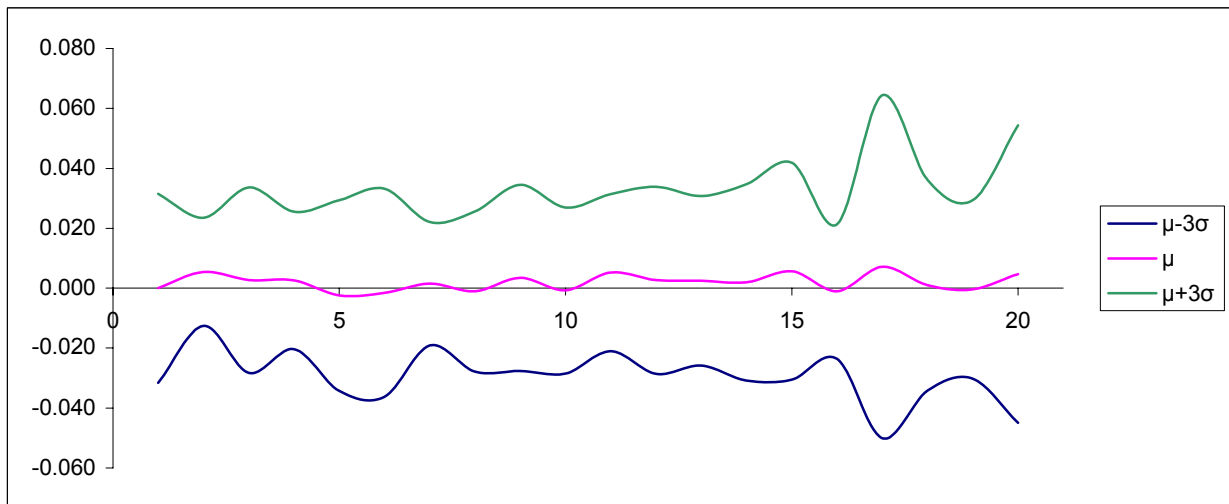
	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
<b>NL</b>	0,0001	0,0052	0,0024	0,0022	0,0029	0,0022	0,0008	0,0019	0,0025	0,0017

	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00	19,00	20,00
<b>NL</b>	0,0041	0,0015	0,0012	0,0006	0,0042	0,0027	0,0055	0,0008	0,0023	0,0027

**Tab. IV Errore di non linearità**

Un altro parametro d'interesse da determinare è la classe dello strumento, definita come:

$$classe = \frac{erroremax}{fondoscala} \cdot 100$$



**Fig. 12: Curve di errore**

Infine, è possibile considerare separatamente i punti determinati in salita, e quelli in discesa e valutare le due rette di regressione, in modo da poter calcolare l'errore di isteresi.



## APPENDICE

### Regressione ai minimi quadrati

Un diagramma sperimentale, ottenuto dai risultati di misura, spesso mostra una dipendenza  $y = f(x)$  che appare ragionevolmente approssimabile con una funzione nota. Ad esempio potrebbe sussistere una relazione del tipo  $y = \sin(kx)$ , oppure  $y = ax^2$ , ecc..., ma altresì potrebbe non essere immediato individuare i valori più opportuni da assegnare a  $k$  o ad  $a$ . Alternativamente, da un'analisi teorica, possiamo conoscere quale tipo di relazione matematica dovrebbe essere rappresentata, ma la dispersione dei dati è talmente grande (ad es. per la presenza del rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i valori di alcuni parametri importanti. Ad esempio, se anche sappiamo che deve sussistere una relazione lineare, del tipo  $y = mx + b$ , tuttavia possiamo non essere in grado di individuare con buona precisione i parametri della retta, ossia i valori di  $m$  e  $b$ .

Un metodo molto usato per affrontare questi problemi è quello della *regressione secondo i minimi quadrati*. Questo metodo consente di trovare i valori dei parametri che individuano completamente una specifica relazione funzionale, che si suppone adatta a descrivere l'andamento dei punti sperimentali. Secondo il metodo, si opera in modo da rendere minima la somma dei quadrati degli scarti tra i valori ottenuti empiricamente,  $y_i(x_i)$ , e i corrispondenti valori della funzione di regressione,  $y(x)$ . In particolare, adottando una relazione lineare del tipo

$$y = mx + b$$

si ha un tipo di regressione definita *regressione lineare*.

Supporremo inoltre che la variabile indipendente  $x$  (che spesso è il tempo o un'altra grandezza di comando accuratamente misurata) sia determinata per  $n$  punti  $x_i$ , noti con incertezza trascurabile: pertanto la dispersione dei risultati sperimentali è sostanzialmente concentrata sugli  $n$  valori  $y_i$ . Per il punto  $i$ -esimo di misura, lo scarto  $\delta_i$  tra il valore empirico,  $y_i$ , e quello della curva di regressione,  $y(x_i)$ , vale:

$$\delta_i = y_i - [m x_i + b]$$

e quindi dobbiamo cercare i valori di  $m$  e  $b$  per i quali  $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$  è minima. Indichiamo ora con

$$\Phi(m, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$$

la somma degli scarti quadratici (funzione di due variabili). Per cercare un minimo di questa funzione, annulliamo le derivate prime di  $\Phi$  rispetto a  $m$  e  $b$ . Si ha dunque:

$$\frac{\partial \phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow (m \sum x_i^2) + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow (m \sum x_i) + nb = \sum y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per  $i$  che va da 1 fino a  $n$ . Abbiamo ottenuto un sistema lineare di due equazioni in due incognite,  $m$  e  $b$  appunto, la cui soluzione è:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n}$$

Notiamo che la seconda soluzione per  $b$ , ottenuta per sostituzione, è più compatta ma richiede la preventiva determinazione di  $m$ . Si verifica piuttosto agevolmente che la soluzione trovata corrisponde a un minimo di  $\Phi(m, b)$ . Per avere una stima oggettiva della bontà della nostra soluzione, che vuole appunto rappresentare una retta, si può calcolare il coefficiente di correlazione  $r$  fra le variabili  $x$  e  $y$ , che in questo caso risulta essere:

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

Il coefficiente di correlazione, ricordiamo sempre compreso tra  $+1$  e  $-1$  indica in questo caso quanto sia valido il risultato della regressione lineare calcolata secondo i coefficienti  $m$  e  $b$  di sopra. Nel caso di dati di partenza bene allineati,  $r$  assume valori prossimi agli estremi:  $r = \pm 1$ . Per  $r = +1$  si ha una relazione lineare con pendenza positiva; per  $r = -1$  la pendenza è negativa; per  $r = 0$  si ha a che fare con dati completamente correlati, o meglio linearmente indipendenti, per cui non è possibile trovare una interpolazione lineare nel senso dei minimi quadrati.