

# MISURE DI POTENZA

## 1. Misure di potenza in circuiti in continua

La potenza elettrica ( $P$ ) dissipata su di un carico ( $L$ ) alimentato da una sorgente in continua ( $E$ ) è data dal prodotto tra la caduta di tensione sul carico ( $V_L$ ) e la corrente che fluisce in esso ( $I_L$ ):

$$P = V_L \times I_L \quad (1)$$

Conseguentemente, la misura di potenza in un circuito in continua può in genere essere ottenuta utilizzando un voltmetro ( $V$ ) ed un amperometro ( $A$ ) seguendo uno degli schemi di Fig. 1 (a o b). Nello schema di Fig. 1a, l'amperometro misura anche la corrente che fluisce nel voltmetro. Al contrario, nella configurazione di Fig. 1b, questo errore è evitato, ma il voltmetro misura anche la caduta di tensione sull'amperometro.

Quindi in entrambe le configurazioni viene misurata una potenza maggiore di quella assorbita dal carico; il relativo errore di misura viene generalmente indicato come errore di *inserzione o di consumo*.

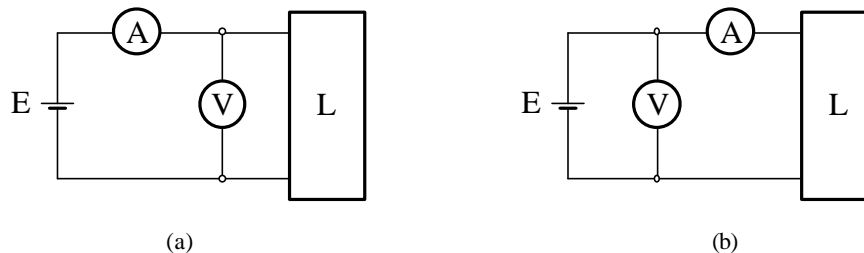


Fig. 1

Avendo indicato con

- $I$ , la corrente misurata dall'amperometro nella configurazione di Fig.1a;
- $V$ , la tensione misurata dal voltmetro nella configurazione di Fig.1b;;
- $R_V$  e  $R_A$ , le resistenze interne del voltmetro e dell'amperometro rispettivamente;
- $R_L$ , la resistenza del carico;
- $I_V$ , la corrente che fluisce nel voltmetro (Fig. 1a);
- $V_A$ , la caduta di tensione sull'amperometro (Fig. 1b);

e trascurando:

- $I_V$ , rispetto ad  $I$ ;
- $V_A$ , rispetto ad  $V$ ,

si ha per le configurazioni di Fig.1a e 1b rispettivamente:

$$\frac{I_V}{I} \cong \frac{I_V}{I_L} = \frac{R_L}{R_V}; \quad \frac{V_A}{V} \cong \frac{V_A}{V_L} = \frac{R_A}{R_L}. \quad (2)$$

Queste relazioni consentono una correzione analitica degli errori di inserzione a partire dalla conoscenza del (i) valore della resistenza sul carico e (ii) del valore della resistenza interna del voltmetro (Fig.1a) o di quella interna dell'amperometro (Fig.1b). Infatti, con le succitate approssimazioni si ha:

(per lo schema di Fig. 1a)

$$P = V_L \times I_L = V \times I \times \left( \frac{R_v - R_L}{R_v} \right) \quad (3)$$

(per lo schema di Fig. 1b)

$$P = V_L \times I_L = V \times I \times \left( \frac{R_L - R_A}{R_L} \right). \quad (4)$$

Lo strumento più comunemente utilizzato per le misure di potenza è il wattmetro elettrodinamico composto da (i) due avvolgimenti fissi, connessi in serie e collegati in posizione coassiale e con uno spazio tra loro e (ii) un avvolgimento mobile, situato tra i due fissi ed equipaggiato con un indice (Fig. 2).

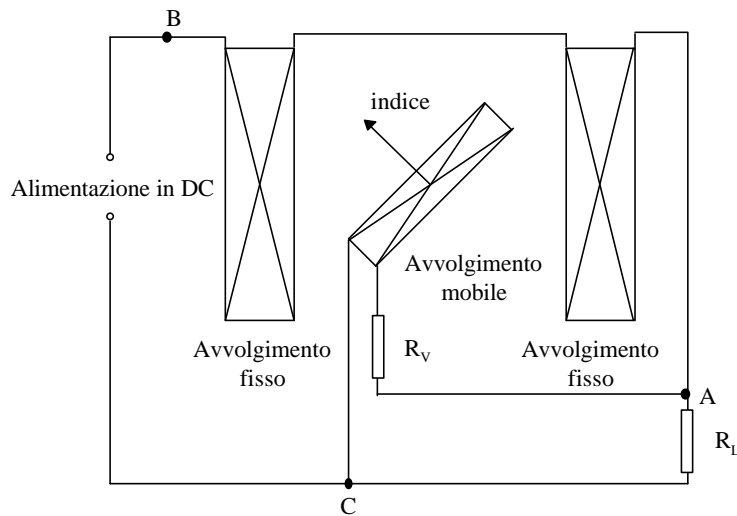


Fig. 2

La coppia motrice risulta proporzionale al prodotto delle correnti che scorrono nei due avvolgimenti: gli avvolgimenti fissi, detti amperometrici, sono interessati dalla corrente sul carico mentre quello mobile, detto voltmetrico, porta una corrente che è proporzionale, tramite la resistenza  $R_v$ , alla caduta di tensione sul carico  $R_L$ . Di conseguenza la deflessione dell'indice è proporzionale alla potenza dissipata sul carico.

A causa degli errori di inserzione precedentemente descritti i valori di potenza dissipata dal carico possono essere valutati come:

$$P_L = P - I^2 R_f \quad (5)$$

dove  $R_f$  è la resistenza dell'avvolgimento amperometrico (configurazione di Fig. 1a), o come.

$$P_L = P - \frac{V^2}{R_v} \quad (6)$$

dove  $R_v$  è la resistenza dell'avvolgimento voltmetrico (configurazione di Fig. 1b).

## 2. Misure di potenza in circuiti in a.c.

### 2.1 Definizioni

Tutto quanto sin qui detto è relativo a circuiti alimentati in continua. In circuiti alimentati in alternata, la potenza elettrica, definita come prodotto tra la caduta di tensione su di un carico predefinito e la corrente che fluisce in esso in funzione del tempo

$$p(t) = v(t) * i(t) \quad (8)$$

viene definita come potenza istantanea. Nei circuiti in a.c. si è principalmente interessati al valore medio della potenza istantanea in un determinato intervallo di tempo. In circuiti alimentati da tensioni periodiche è rilevante definire la potenza media dissipata in un periodo T (potenza attiva) come:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (9)$$

Il caso più semplice riguarda un generatore sinusoidale che alimenta un carico puramente resistivo. In questo caso,  $v(t)$  e  $i(t)$  sono in fase e  $p(t)$  è data da:

$$p(t) = V * I * [1 - \cos(2\omega t)] \quad (10)$$

in cui:

- V e I sono i valori efficaci di  $v(t)$  e  $i(t)$ , rispettivamente;
- $\omega$  è la velocità angolare dell'alimentazione.

La potenza elettrica dissipata sul carico è data da un valore costante  $V * I$  più una quantità oscillante a frequenza doppia di quella dell'alimentazione. Conseguentemente, il valor medio della potenza, in un periodo è semplicemente pari al prodotto  $V * I$  (potenza attiva). In questo caso, tutte le considerazioni fatte per la misura di potenza nei circuiti in continua sono ancora applicabili con riferimento alla misura di potenza attiva purché si sostituiscano i valori di tensione e corrente con i corrispondenti valori efficaci.

Nel caso di circuiti puramente reattivi si ha: la caduta di tensione ai capi del carico e la corrente che scorre in esso sono sfasate di 90 gradi. La potenza istantanea  $p(t)$  è data da:

$$p(t) = V * I * \sin(2\omega t) \quad (11)$$

La potenza media (o attiva) dissipata in un carico reattivo in un periodo dell'alimentazione è zero a causa dello sfasamento introdotto dal carico tra tensione e corrente.

In questi casi semplici di carico puramente resistivo o reattivo, il carico può essere espresso tramite un numero reale o immaginario. Più in generale il carico è espresso tramite un numero complesso. In questo caso, l'impedenza del carico può essere rappresentata tramite il suo circuito equivalente consistente, ad esempio, nella serie di una pura resistenza e di una pura reattanza (induttiva o capacitiva). Con questa rappresentazione in mente, la potenza elettrica dissipata su di un carico  $Z_L$  (Fig. 3) può essere espressa dalla somma delle componenti di potenza dissipate separatamente sulla resistenza equivalente  $R_{EQ}$  e sulla reattanza  $X_{EQ}$  del circuito equivalente di  $Z_L$ .

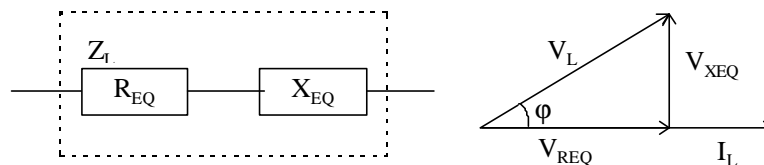


Fig. 3

Considerando che sulla reattanza non vi è dissipazione di potenza attiva si ha:

$$P = V_{REQ} * I_L = V_L * I_L * \cos(\varphi) \quad (12)$$

Il termine  $\cos(\varphi)$  che appare nella (12) prende il nome di *fattore di potenza*. Esso tiene conto del fatto che solo una frazione della tensione  $V_L$  dà contributo alla potenza, infatti la sua

componente  $V_{XEQ}$  (caduta sulla reattanza) non produce alcuna potenza attiva essendo ortogonale alla corrente  $I_L$  che scorre nel carico.

Gli effetti del fattore di potenza su forme d'onda di potenza istantanea ( $p$ ), tensione ( $v$ ) e corrente ( $i$ ) è illustrata in Fig. 4. Osservando gli andamenti relativi di tensione e corrente negli stessi istanti si può dedurre che il loro prodotto avrà un valore medio (i) non-nullo, solo se esiste una differenza di fase, e (ii) in particolare, proporzionale a tale sfasamento.

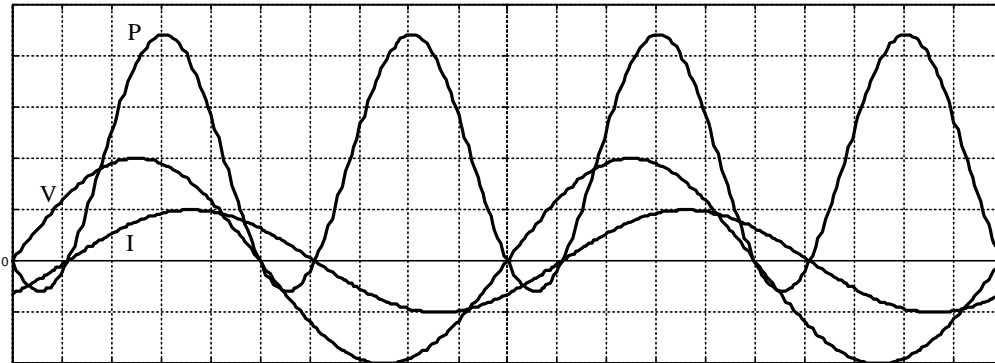


Fig.4

Il termine:

$$P_A = V_L * I_L \quad (13)$$

è detto *potenza apparente*, mentre il termine:

$$Q = V_{XEQ} * I_L = V_L * I_L * \sin(\varphi) \quad (14)$$

è detto *potenza reattiva* poiché rappresenta una quantità, dimensionalmente omogenea con una potenza, ottenuta come conseguenza della caduta di tensione su di una pura reattanza e che, perciò, non dà alcun contributo alla potenza attiva. Dalla Fig. 3, è possibile dedurre la relazione esistente tra *potenza apparente*, *potenza attiva* e *potenza reattiva*:

$$P_A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (15)$$

I wattmetri costruiti per operare in circuiti in a.c. sono progettati per poter integrare la potenza istantanea secondo la (9). Gli errori di inserzione possono essere derivati in maniera analoga al caso in continua. Tuttavia in a.c., nasce un errore di fase dovuto alla caratteristica non puramente resistiva dell'avvolgimento voltmetrico. In regime puramente sinusoidale, se  $\epsilon_w$  è la fase della impedenza dell'avvolgimento e  $\cos(\varphi)$  il fattore di potenza del carico, l'errore relativo nella misura di potenza attiva risulta pari ad  $\epsilon_w \tan(\varphi)$ .

Nel caso più generale di grandezze deformate, la rappresentazione simbolica sin qui utilizzata non può più essere utilizzata. In ogni caso, la potenza attiva è sempre definita come la potenza media dissipata in un intervallo di tempo.

Per quanto riguarda i metodi e gli strumenti per le misure di potenza in a.c., è utile fare una classificazione tra i circuiti. Infatti nascono problemi differenti al crescere della frequenza dell'alimentazione. Perciò è possibile suddividere i circuiti in a.c. in (i) circuiti alla frequenza industriale, (ii) circuiti a media e bassa frequenza (fino ad alcuni MHz) e (iii) circuiti in alta frequenza (fino ai GHz). I circuiti a frequenza industriale sono esaminati separatamente da quelli a bassa frequenza principalmente perché esistono alcune peculiarità legate a misure su circuiti trifase. I circuiti di tipo (iii) non verranno qui approfonditi.

## 2.2. Misure di potenza a media e bassa frequenza.

### 2.2.1 Metodo dei tre voltmetri

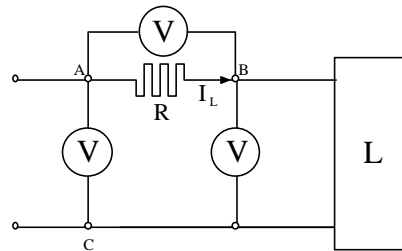


Fig. 5.

La potenza dissipata su un carico  $L$  può essere misurata utilizzando un resistore anti-induttivo  $R$  e misurando tre tensioni come mostrato in Fig. 5. Sebbene uno di questi tre voltmetri può sembrare in prima battuta ridondante, in realtà servono tre misure indipendenti per valutare la potenza dall'eq. (12). In particolare, dalle cadute di tensione  $v_{AB}$  e  $v_{BC}$ , possono essere valutate direttamente la corrente e la tensione;  $v_{AC}$  è necessario per ottenere informazioni sulla loro fase relativa.

Trascurando le correnti derivate dai voltmetri e detta  $I_L$  la corrente sul carico  $L$ , si ha:

$$\begin{aligned} v_{AC} &= v_L + R i_L \\ v_{AC}^2 &= R^2 i_L^2 + v_L^2 + 2R v_L i_L \end{aligned} \quad (16)$$

dove le lettere minuscole indicano i valori istantanei. Calcolando i valori efficaci (indicati le lettere maiuscole) si ottiene la potenza  $P_L$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T v_{AC}^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T R^2 i_L^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_L^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T 2R v_L i_L dt \\ v_{AC}^2 - v_L^2 &= 2R \left( P_L + \frac{R i_L^2}{2} \right) \\ P_L &= \frac{v_{AC}^2 - R^2 i_L^2 - v_L^2}{2R} \end{aligned} \quad (17)$$

La (17) è la stessa anche in continua, sostituendo i valori efficaci con quelli in continua. Poiché il risultato è stato ottenuto come differenza, nascono problemi quando i tre termini hanno una somma quasi nulla, in quanto l'errore relativo tende all'infinito.

### 2.2.2 Wattmetri termici

Il principio del wattmetro termico è nell'uso di due termocoppie gemelle. La potenza attiva  $P$  è ottenuta tramite una misura della tensione continua  $e$  tra le due termocoppie. Uno strumento basato su questo principio può raggiungere incertezze fino all'1% sino ad 1 MHz.

Adottando soluzioni basate su tecniche di retroazione, non sono necessarie correzioni per compensare la non linearità delle termocoppie, e, utilizzando due termocoppie gemelle si ottiene un notevole miglioramento delle prestazioni.

Si ottengono infatti incertezze minime di 10 ppm e campi di frequenza fino ad 1 kHz.

### 2.2.3 Wattmetri basati su moltiplicatori

I processi di moltiplicazione e media (Fig. 6) coinvolti nella misura di potenza possono essere svolti da componenti elettronici.

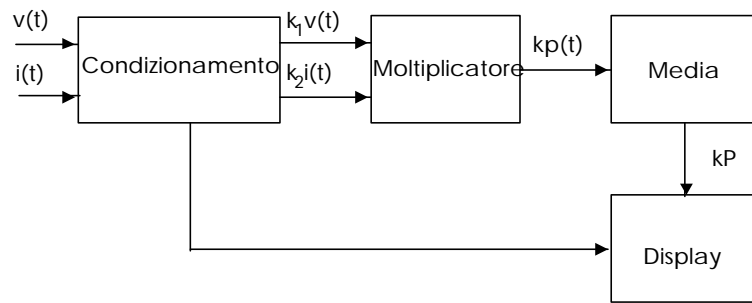


Fig. 6

I wattmetri elettronici possono essere suddivisi in due categorie a seconda se le operazioni di moltiplicazione e di media siano effettuate in maniera discreta o continua.

Nei metodi “continui”, le moltiplicazioni sono effettuate da moltiplicatori analogici. Nei metodi “discreti”, wattmetri a campionamento prelevano contemporaneamente campioni delle forme d’onda di tensione e corrente, li digitalizzano ed effettuano quindi le operazioni necessarie utilizzando tecniche digitali.

### 2.2.3.1 Wattmetri basati su moltiplicatori analogici

I principali moltiplicatori analogici sono (i) a quattro quadranti, (ii) a divisione di tempo (TDM), e (iii) ad effetto Hall.

#### Wattmetro basato sul moltiplicatore a quattro quadranti

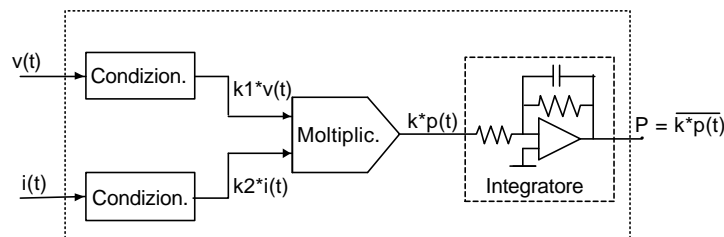


Fig. 7

Il più semplice dei wattmetri a moltiplicatore analogico è mostrato in Fig. 7. Esso consiste in due sezioni di condizionamento, un moltiplicatore a quattro quadranti che processa tensione e corrente e dà la potenza istantanea ed un integratore che fornisce la potenza media

## Wattmetro basato su un TDM

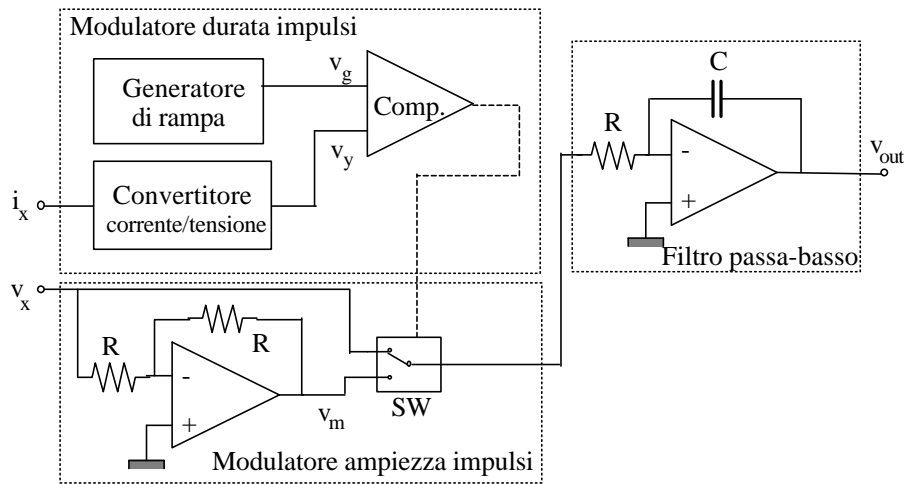


Fig. 8

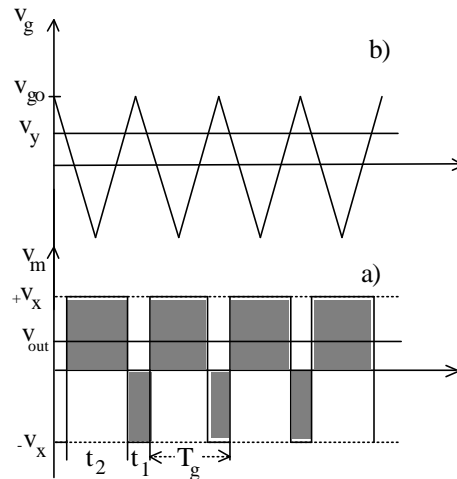


Fig. 9

Lo schema a blocchi di un wattmetro a divisione di tempo è mostrato in Fig. 8. Viene generata un'onda quadra  $v_m$  (Fig. 9a) di periodo costante  $T_g$ , e duty cycle ed ampiezza determinate da  $i(t)$  e  $v(t)$ , rispettivamente. Se  $T_g$  è molto più piccolo del periodo dei misurandi  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$ , tali tensioni possono essere considerate costanti durante tale intervallo di tempo.

Il duty cycle di  $V_m$  è fissato da un circuito modulatore della durata degli impulsi (Fig. 8). La tensione triangolare  $v_g(t)$  (Fig. 9b) viene confrontata con la tensione  $v_y(t)$  proporzionale a  $i(t)$  ed viene così determinato un intervallo di tempo  $t$  la cui durata è proporzionale a  $v_y(t)$ . Se

$$v_g(t) = \frac{4V_{g0}}{T_g} t \quad \text{dove} \quad 0 \leq t \leq \frac{T_g}{4}, \quad (18)$$

da semplici considerazioni geometriche, si ottiene

$$t_2 = 2\left(\frac{T_g}{4} - \frac{v_y T_g}{4V_{g0}}\right) \quad \text{e} \quad t_1 - t_2 = \frac{T_g}{V_{g0}} v_y. \quad (19)$$

L'ampiezza di  $v_m(t)$  è fissata da un circuito modulatore dell'ampiezza dell'impulso. L'onda quadra in uscita del modulatore della durata dell'impulso pilota l'uscita  $v_m(t)$  dell'interruttore SW in modo che sia uguale a  $+v_x$  durante l'intervallo di tempo  $t_1$ , ed a  $-v_x$  durante l'intervallo di tempo  $t_2$  (Fig. 9a).

Quindi la tensione  $v_{out}(t)$  in uscita al filtro passa basso è pari al valor medio di  $v_m(t)$ :

$$V_{out} = \frac{1}{T_g} \int_0^{T_g} v_m(t) dt = K' \left( \int_0^{t_1} v_x(t) dt - \int_{t_1}^{t_1+t_2} v_x(t) dt \right) = K' v_x(t_1 - t_2) = K v_x v_y. \quad (20)$$

Il limite in alta frequenza di questo wattmetro è determinato dal filtro e deve essere inferiore a metà della frequenza del segnale  $v_g(t)$ . Il limite in frequenza è generalmente tra 200 Hz e 20 kHz, e può arrivare sino a 100 kHz. L'incertezza tipica è di 0.01-0.02%.

### Wattmetri ad effetto Hall

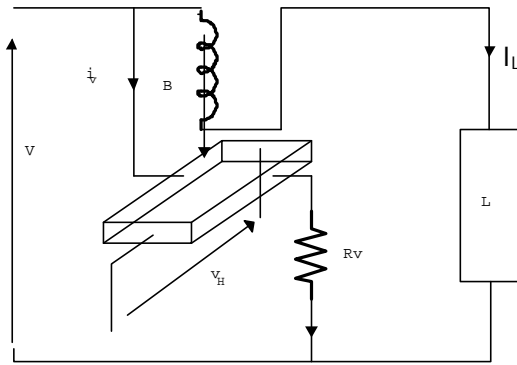


Fig. 10a

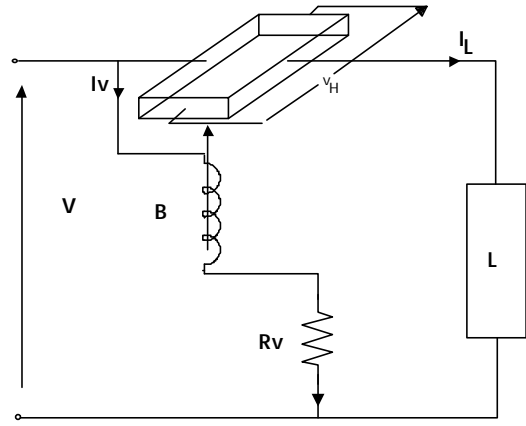


Fig. 10b

Come noto, in un trasduttore ad effetto Hall la tensione  $v_H(t)$  è proporzionale al prodotto di due grandezze tempo varianti:

$$v_H(t) = R_H \cdot i(t) \cdot B(t), \quad (21)$$

dove  $R_H$  è la costante di Hall,  $i(t)$  è la corrente che passa attraverso il trasduttore, e  $B(t)$  è l'induzione magnetica. La potenza  $P$  è determinata misurando  $v_H(t)$  attraverso un voltmetro a valor medio con alta impedenza di ingresso e considerando che  $v_x(t) = a \cdot i(t)$  e  $i_x(t) = b \cdot B(t)$ , dove  $a$  e  $b$  sono fattori di proporzionalità:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v_x(t) \cdot i_x(t) dt = ab \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot B(t) dt = R_H \cdot V_H \quad (22)$$

dove  $T$  è il periodo del misurando.

Nella configurazione abituale il moltiplicatore di Hall, mostrato in Fig. 10a, l'induzione magnetica è proporzionale alla corrente sul carico e la corrente di polarizzazione ottimale  $i_v$  è fissata da un resistore  $R_v$ . Per valori di frequenza superiori al GHz, la piastrina di Hall è posizionata direttamente nella guida d'onda in modo da sentire il campo magnetico. Considerando la variabilità della costante di Hall col tempo e con la temperatura, è spesso necessario un calibratura del dispositivo.

Fino al GHz, è possibile un arrangiamento alternativo, riportato in Fig. 10b, in cui la corrente del carico  $I_L$  scorre direttamente nella piastrina di Hall, fungendo da corrente di polarizzazione, ed il campo magnetico è generato dalla tensione  $v$ . In questo modo, per applicazioni a frequenza industriale, con tensione di ampiezza costante e corrente variabile, l'influenza della temperatura è minore. Con tale soluzione si possono raggiungere incertezze fino allo 0.1%.



### 2.2.3.2 Wattmetri basati su moltiplicatori digitali

#### Wattmetri a campionamento

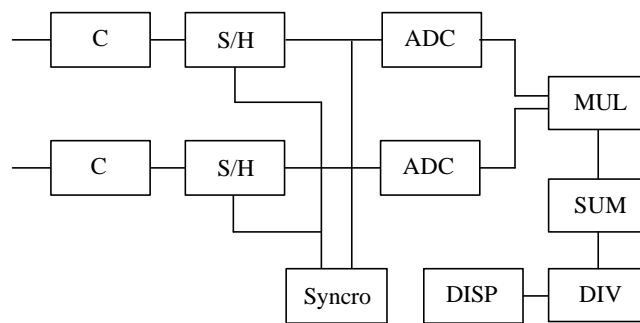


Fig. 11

Il wattmetro più importante di quelli che operano su campioni discreti è quello a campionamento. E' composto essenzialmente da due canali analogico-digitali, costituiti da un condizionamento (C), un sample and hold (S/H) ed un convertitore analogico-digitale (ADC), da un moltiplicatore digitale (MUL), un sommatore (SUM), un divisore (DIV), ed una unità di visualizzazione (DISP). L'intero strumento è gestito da un opportuno processore.

Se i campioni sono equispaziati, la potenza attiva è valutata come media delle sequenze dei campioni di potenza istantanea  $p(k)$ :

$$P = \frac{1}{N^*} \sum_{k=0}^{N^*-1} p(k) = \frac{1}{N^*} \sum_{k=0}^{N^*-1} v(k) \cdot i(k) \quad (23)$$

dove  $N^*$  rappresenta il numero di campioni in un periodo del segnale di ingresso. Una stima preventiva del periodo della fondamentale è effettuata per aggiustare l'intervallo della sommatoria dell'eq.(23) e/o il periodo di campionamento al fine di effettuare un campionamento sincrono. Il periodo di campionamento può essere variato utilizzando un oscillatore controllato in tensione pilotato dal segnale di ingresso. In alternativa, il contributo dell'errore di campionamento può essere ridotto effettuando la media su un elevato numero di periodo del segnale di ingresso.

La stima nel dominio del tempo del periodo di segnali fortemente deformati, come segnali PWM, è resa difficoltosa da numerosi attraversamenti di zero presenti nella forma d'onda. Una possibile soluzione è rappresentata dall'integrazione del segnale PWM: il periodo della fondamentale è stimato valutando i cambi di segno della funzione somma cumulata:

$$S(k) = \sum_{i=1}^k v_i + c \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

Una strada alternativa per ottenere la potenza media consiste nel considerare le componenti armoniche di tensione e corrente nel dominio della frequenza utilizzando la FFT.

### 2.3. Misure di potenza a frequenza industriale

Per applicazioni a frequenza industriale dove la potenza viene direttamente fornita dalla rete di alimentazione, l'assunzione che la sorgente sia a potenza infinita è lecita così come almeno una delle due grandezze, tensione o corrente, può essere considerata come sinusoidale. In tal caso, la definizione di potenza come prodotto tra tensione e corrente implica che può essere esaminata solo la potenza connessa con la fondamentale.

#### 2.3.1 Misure in circuiti monofase

Le misure di potenza in circuiti monofase a frequenza industriale sono effettuate seguendo i metodi ed utilizzando gli strumenti precedentemente descritti. In applicazioni pratiche, ha notevole interesse il caso di tensioni superiori ai 1000 V; le misure vengono effettuate utilizzando TA e TV come nell'esempio di Fig. 12. L'incertezza relativa vale:

$$\frac{DP}{P} = (h_w + h_a + h_v) + (e_w + e_a + e_v) \operatorname{tg} F_c \quad (25)$$

dove  $\eta_w$  e  $\varepsilon_w$  sono le incertezze strumentali e di fase del wattmetro,  $\eta_a$  e  $\eta_v$  sono gli errori di rapporto del TA e del TV, e  $\varepsilon_a$  ed  $\varepsilon_v$  sono le incertezze di fase.

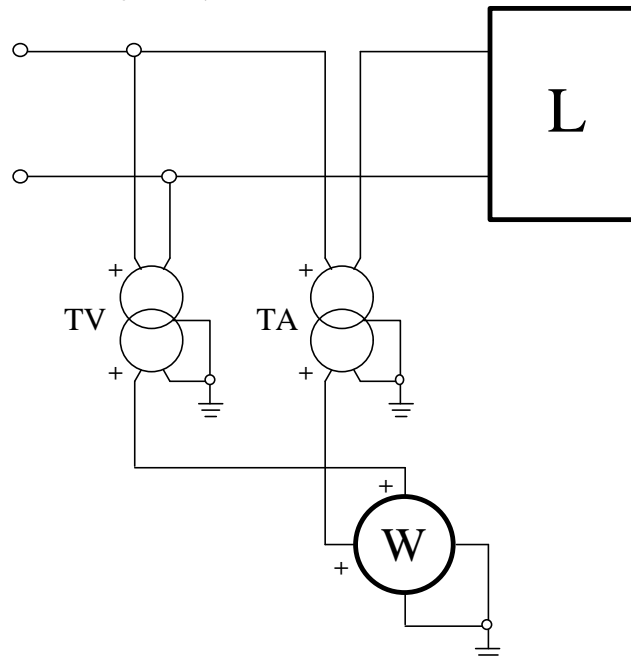


Fig.12

Se la corrente sul carico supera i 5A deve essere usato un TA anche per basse tensioni.

#### 2.3.2 Misure in circuiti polifase

I circuiti trifase sono i circuiti polifase più diffusi nelle applicazioni industriali di interesse pratico. Nel seguito verranno analizzati i seguenti casi: (i) sistemi simmetrici ed equilibrati, (ii) sistemi a tre fili, (iii) misure basate su due wattmetri, (iv) sistemi squilibrati, (v) misure basate su tre wattmetri, e (vi) sistemi a media tensione.

### 2.3.2.1 Misure su sistemi a più fili

Si consideri una rete con tensione e corrente sinusoidale avente n fili. Tra le correnti che scorrono in tali fili sussiste la relazione:

$$\sum_I^n \dot{I}_i = 0 \quad (26)$$

La rete può essere vista come composta da n-1 sistemi monofase indipendenti, con un ritorno comune su un qualunque filo (ad esempio l's-mo filo). Di conseguenza, la potenza assorbita può essere misurata come somma delle letture di n-1 wattmetri, ognuno inserito con l'amperometrica su un filo differente e con il circuito voltmetrico tra tale filo e l's-mo (Fig. 13):

$$P = \sum_I^{n-1} (\dot{V}_{is} \times \dot{I}_i) \quad (27)$$

La potenza assorbita può essere anche misurata con riferimento ad un qualunque punto O interno od esterno alla rete. In tale caso, la potenza assorbita sarà la somma delle letture di n wattmetri ognuno inserito con l'amperometrica su di un filo differente e con il circuito voltmetrico tra tale filo ed il punto O:

$$P = \sum_I^n (\dot{V}_{io} \times \dot{I}_i) \quad (28)$$

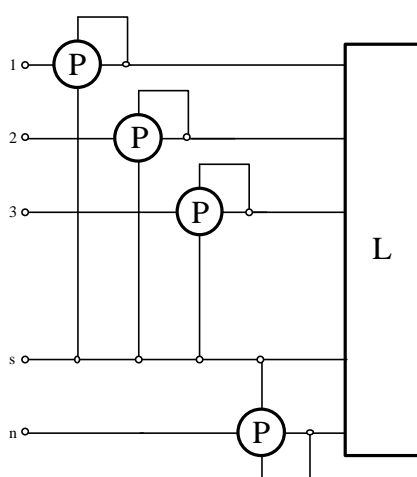


Fig. 13

### 2.3.2.2 Misure di potenza su circuiti a tre fili

La potenza attiva in un sistema trifase può essere in generale valutata tramite tre wattmetri connessi come in Fig.14.

Per ognuno dei wattmetri, il circuito amperometrico è connesso su una fase ed il circuito voltmetrico è connesso tra lo stesso conduttore ed un centro stella artificiale O, la cui posizione è fissata dalle impedenze delle voltmetriche dei wattmetri o tramite opportune impedenze esterne.

In tali condizioni, la potenza assorbita sarà data dalle somma delle indicazioni dei tre wattmetri:

$$P = \sum_I^3 (\dot{V}_{io} \times \dot{I}_i) \quad (29)$$

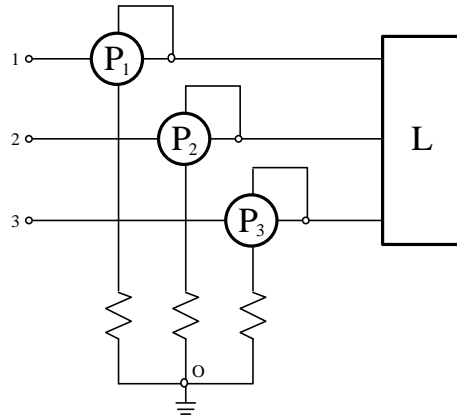


Fig. 14

Se il sistema trifase è a quattro fili (trifase con neutro), il neutro può essere utilizzato come conduttore comune.

### 2.3.2.3 Sistemi simmetrici ed equilibrati

Il sistema di alimentazione è simmetrico ed il carico è bilanciato se:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 = V_3 \\ I_1 = I_2 = I_3 \end{cases} \quad (30)$$

In Fig. 15 sono mostrate le tre possibili inserzioni di uno strumento S (sia wattmetro sia varmetro). La prima (Fig. 15a) è stata descritta nel paragrafo precedente; se S è un wattmetro, la potenza attiva totale è pari a tre volte la sua indicazione, analogamente per la potenza reattiva se è un varmetro.

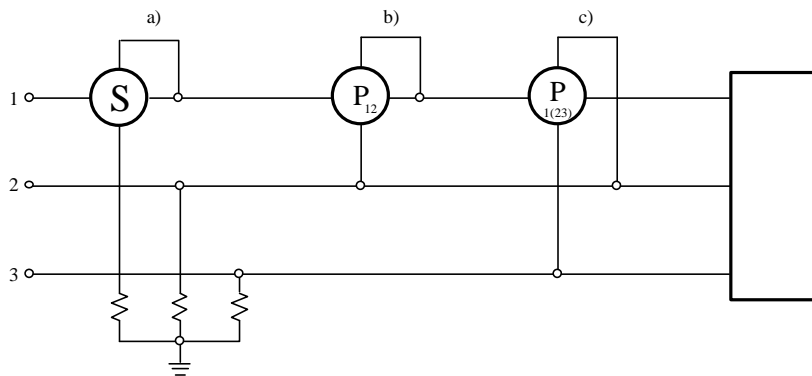


Fig. 15

Le altre due inserzioni sono caratterizzate dalle seguenti convenzioni:  $S_{ijk}$  indica una lettura di un wattmetro la cui amperometrica è connessa alla linea 'i' e la cui voltmetrica è connessa tra le fasi 'j' e 'k'. Se 'i' è uguale a 'j', una delle due viene omessa (per esempio, la notazione  $P_{12}$  di Fig. 15b). La potenza attiva assorbita da una singola fase è di solita indicata come  $P_1$ .

La lettura del wattmetro di Fig. 15c è uguale alla potenza reattiva  $Q_1$  della fase 1, a meno di un fattore  $\sqrt{3}$ . Di conseguenza, in caso di sistema simmetrico ed equilibrato, l'intera potenza reattiva è data da:

$$Q = 3 \cdot Q_1 = 3 \cdot P_{1(23)} / \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot P_{1(23)} \quad (31)$$

Infatti abbiamo:

$$P_{1(23)} = \dot{I}_1 \times \dot{V}_{23} \quad (32)$$

ma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} &= 0 & \Rightarrow & P_{1(23)} = \dot{I}_1 \times (-\dot{V}_{12} - \dot{V}_{31}) \\ \dot{V}_{13} &= -\dot{V}_{31} & \Rightarrow & P_{1(23)} = -\dot{I}_1 \times \dot{V}_{12} + \dot{I}_1 \times \dot{V}_{13} \\ \begin{cases} \dot{I}_1 \times \dot{V}_{12} = P_{12} \\ \dot{I}_1 \times \dot{V}_{13} = P_{13} \end{cases} & & \Rightarrow & P_{1(23)} = P_{13} - P_{12} \end{aligned}$$

In maniera analoga, possono essere dimostrate le seguenti relazioni, valide per qualunque tipo di sistema:

$$\begin{aligned} P_{1(23)} &= P_{13} - P_{12} \\ P_{2(31)} &= P_{21} - P_{23} \\ P_{3(12)} &= P_{32} - P_{31} \end{aligned} \quad (33)$$

Se il sistema è simmetrico si ha  $P_{1(23)} = \sqrt{3} \cdot Q_1$

Infatti, partendo dalle relazioni:

$$P_{1(23)} = \dot{I}_1 \times \dot{V}_{23} = I_1 V_{23} \cos \beta \quad (34)$$

dove  $\beta = 90^\circ - \varphi_1$ , si ha  $P_{1(23)} = \sqrt{3} \cdot E_1 \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1 = \sqrt{3} \cdot Q_1$

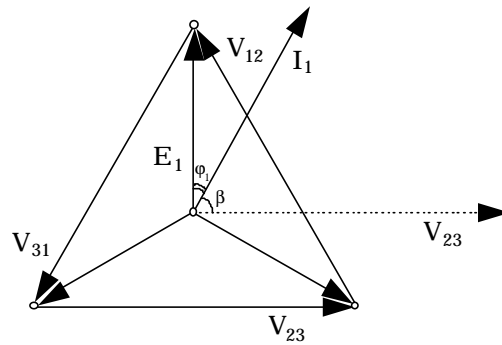


Fig. 16

In maniera analoga, possono essere ricavate espressioni simili per  $P_{2(31)}$  e  $P_{3(12)}$ . In particolare, dunque:

$$\begin{aligned} P_{1(23)} &= \sqrt{3} \cdot Q_1 = P_{13} - P_{12} \\ P_{2(31)} &= \sqrt{3} \cdot Q_2 = P_{21} - P_{23} \\ P_{3(12)} &= \sqrt{3} \cdot Q_3 = P_{32} - P_{31} \end{aligned} \quad (35)$$

### 2.3.2.4 Misure di potenza con due wattmetri

L'intera potenza assorbita da un sistema a tre fili può essere misurata utilizzando solo due wattmetri. Infatti, il teorema di Aron stabilisce le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P &= P_{12} + P_{32} \\ P &= P_{23} + P_{13} \\ P &= P_{31} + P_{21} \end{aligned} \quad (36)$$

In maniera analoga, l'intera potenza reattiva può essere misurata utilizzando solo due varmetri:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{12} + Q_{32} \\ Q &= Q_{23} + Q_{13} \\ Q &= Q_{31} + Q_{21} \end{aligned} \quad (37)$$

Il teorema di Aron è applicabile per ogni tipo di alimentazione e carico, purché il sistema sia a tre fili. In caso di sistemi simmetrici ed equilibrati esso consente anche una misura della potenza reattiva totale:

$$Q = \sqrt{3} \cdot (P_{32} - P_{12}) \quad (38)$$

Usando le equazioni (36) e (38) è possibile valutare il fattore di potenza:

$$\cos j = \frac{P_{12} + P_{32}}{\sqrt{(P_{12} + P_{32})^2 + 3(P_{32} - P_{12})^2}} = \frac{P_{12} + P_{32}}{\sqrt{4P_{12}^2 + 4P_{32}^2 - 4P_{12}P_{32}}} = \frac{1 + \frac{P_{12}}{P_{32}}}{2\sqrt{\left(\frac{P_{12}}{P_{32}}\right)^2 - \left(\frac{P_{12}}{P_{32}}\right) + 1}} \quad (39)$$

L'inserzione Aron non può essere utilizzata quando il fattore di potenza è basso. Infatti, considerando le funzioni (Fig. 17):

$$\begin{aligned} \cos(j + 30) &= \frac{P_{12}}{VI} \\ \cos(j - 30) &= \frac{P_{32}}{VI} \end{aligned} \quad (40)$$

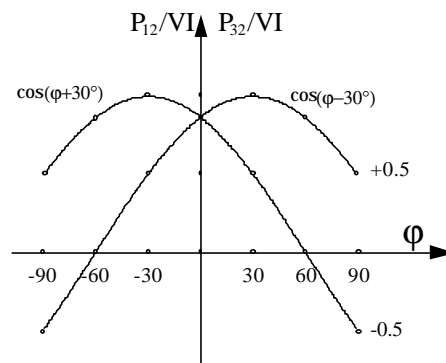


Fig. 17

si può affermare che: (i) per  $\varphi \leq 60^\circ$ ,  $P_{12}$  e  $P_{32}$  sono entrambi maggiori di zero; (ii) per  $\varphi > 60^\circ$ ,  $\cos(j - 30)$  è ancora maggiore di zero mentre  $\cos(j + 30)$  è minore di zero.

L'errore assoluto nella misura di potenza attiva vale:

$$DP = \frac{f(P_{12} + P_{32})}{fP_{12}} DP_{12} + \frac{f(P_{12} + P_{32})}{fP_{32}} DP_{32} = DP_{12} + DP_{32} \quad (41)$$

Il corrispondente errore relativo cresce quando  $P_{12}$  e  $P_{32}$  hanno valori prossimi l'un l'altro e segno opposto; in particolare per  $\cos\varphi = 0$  ( $\varphi = 90^\circ$ ) l'errore è infinito.

Se  $\eta_w$  e  $\varepsilon_w$  sono gli errori di ampiezza e fase del wattmetro, l'errore nella misura della potenza:

$$\frac{DP}{P} = \frac{(h_w + e_w \operatorname{tg} j_{12})P_{12} + (h_w + e_w \operatorname{tg} j_{32})P_{32}}{P_{12} + P_{32}} = h_w + e_w \frac{Q}{P} \quad (42)$$

Se si hanno due wattmetri con valori nominali  $V_0$ ,  $I_0$ ,  $\cos\varphi_0$ , e classe  $c$ , il massimo errore assoluto in una lettura è:

$$DP = \frac{cV_0I_0 \cos j_0}{100} \quad (43)$$

Quindi, l'errore relativo percentuale connesso alla somma delle due indicazioni vale:

$$\frac{DP}{P} = \frac{cV_0I_0 \cos j_0}{\sqrt{3}VI \cos f} = 1,11 \frac{cV_0I_0 \cos j_0}{VI \cos f} \quad (44)$$

circa pari all'errore che si avrebbe utilizzando un solo wattmetro per una misura su di un circuito monofase con gli stessi valori di  $I$ ,  $V$  e  $\cos\varphi$ . Di conseguenza, nelle stesse condizioni, l'uso di due wattmetri è caratterizzato da un'incertezza significativamente minore rispetto all'uso di tre wattmetri. Tuttavia, in circuiti a basso  $\cos\varphi$ , è necessario utilizzare tre wattmetri a basso  $\cos\varphi$ .

Se l'inserzione Aron è effettuata insieme all'uso di TA e TV, caratterizzati da errori di rapporto  $\eta_a$  e  $\eta_v$ , e di fase  $\varepsilon_a$  ed  $\varepsilon_v$ , l'errore nella misura della potenza attiva vale:

$$\frac{DP}{P} = \frac{(h_{TOT} + e_{TOT} \operatorname{tg} j_{12})P_{12} + (h_{TOT} + e_{TOT} \operatorname{tg} j_{32})P_{32}}{P_{12} + P_{32}} = h_{TOT} + e_{TOT} \frac{Q}{P} = h_{TOT} + e_{TOT} \cdot \operatorname{tg} F_c \quad (45)$$

dove:

$\cos\Phi_c$  è il fattore di potenza, e

$$\eta_{TOT} = \eta_w + \eta_a + \eta_v$$

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_w + \varepsilon_a + \varepsilon_v$$

con  $\eta_w$   $\varepsilon_w$  gli errori del wattmetro.

### 2.3.2.5 Sistemi simmetrici e squilibrati

Se il carico è squilibrato, le ampiezze delle correnti sono diverse ed esse non sono sfasate tra loro di  $120^\circ$ .

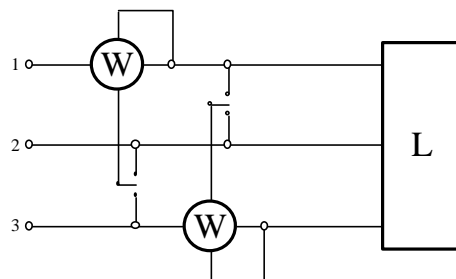


Fig. 18

Possono essere utilizzati, in questo caso, due wattmetri ed un voltmetro connessi come proposto dal Barbagelata (Fig. 18). Il primo wattmetro misura  $P_{12}$  e  $P_{13}$ ; il secondo  $P_{31}$  e  $P_{32}$ .

Dal teorema di Aron:

$$P = P_{12} + P_{32}; \quad (46)$$

mentre la potenza reattiva  $Q$  si dimostra vale:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} [P_{13} - P_{12} + P_{21} - P_{23} + P_{32} - P_{31}] \quad (47)$$

Quindi, si ottengono potenza attiva e reattiva con solo quattro misure di potenza.

I maggiori svantaggi di questo metodo sono nel fatto che le quattro misure non sono contemporanee; conseguentemente eventuali variazioni del carico causano perdita in precisione.

E' possibile utilizzare in alternativa una connessione proposta dal Righi (Fig. 19).

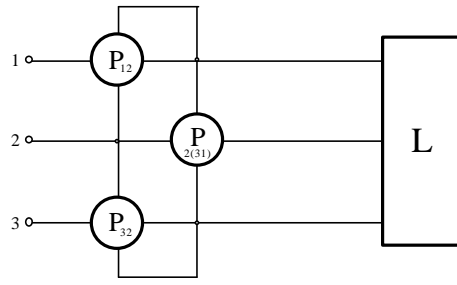


Fig. 19

I tre wattmetri connessi come in figura danno simultaneamente  $P_{12}$ ,  $P_{32}$ , e  $P_{2(31)}$ . E' possibile dimostrare che la potenza reattiva vale:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} [P_{13} - P_{12} + P_{21} - P_{23} + P_{32} - P_{31}] \quad (48)$$

Per sistemi simmetrici e squilibrati è possibile un'ulteriore inserzione con due wattmetri (Fig. 20).

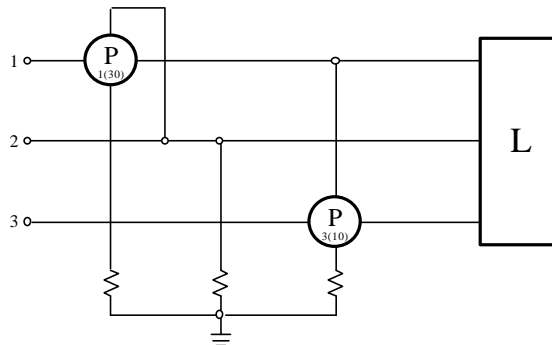


Fig. 20

I wattmetri danno:

$$P_{1(30)} = \dot{E}_3 \times \dot{I}_1 = j \frac{\dot{V}_{12}}{\sqrt{3}} \times \dot{I}_1 = -\frac{Q_{12}}{\sqrt{3}} \quad (49)$$

$$P_{3(10)} = \dot{E}_1 \times \dot{I}_3 = j \frac{\dot{V}_{23}}{\sqrt{3}} \times \dot{I}_3 = \frac{Q_{32}}{\sqrt{3}}$$

La potenza reattiva totale vale dunque:

$$Q = Q_{12} + Q_{32} = \sqrt{3} [-P_{1(30)} + P_{3(10)}] \quad (50)$$

### 2.3.2.6 Inserzione con tre wattmetri



Un sistema trifase a tre fili può essere affrontato con tre wattmetri connessi come in figura. La posizione del centro stella artificiale non influenza la misura.

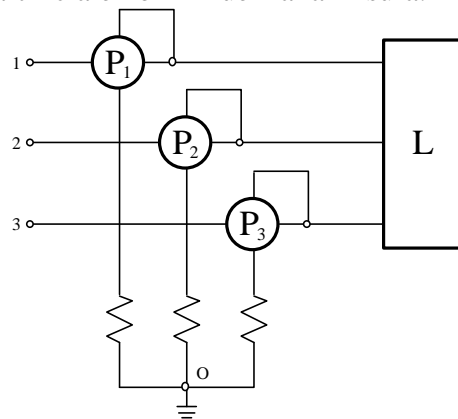


Fig. 21

### 2.3.2.7 Inserzione di tre wattmetri in circuiti in media tensione

In maniera analoga a quanto mostrato per circuiti monofase, in media tensione l'iserzione di tre wattmetri è modificata come mostrato in Fig. 22.

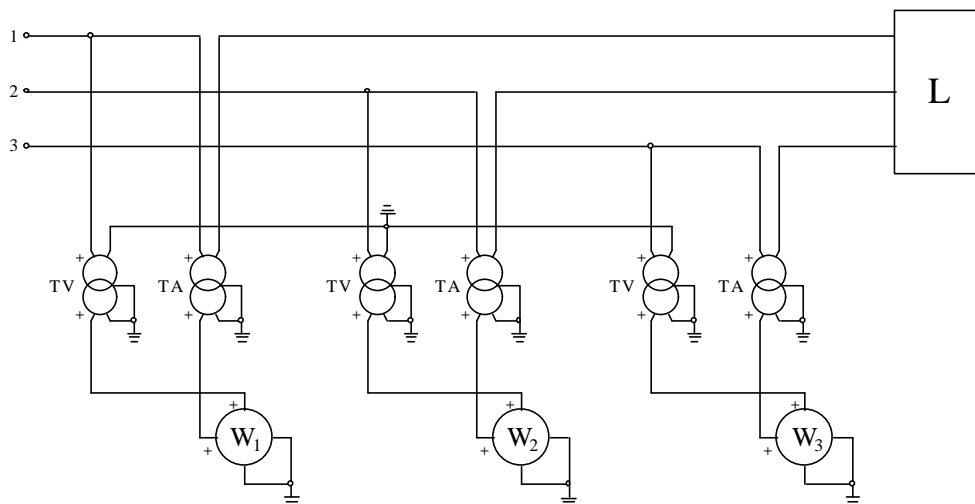


Fig. 22

### 2.3.2.8 Guida alla scelta del metodo

Per sistemi a tre fili, è possibile seguire il grafo di flusso di Fig. 23 per essere guidati nella scelta del metodo più adatto alle caratteristiche del sistema.

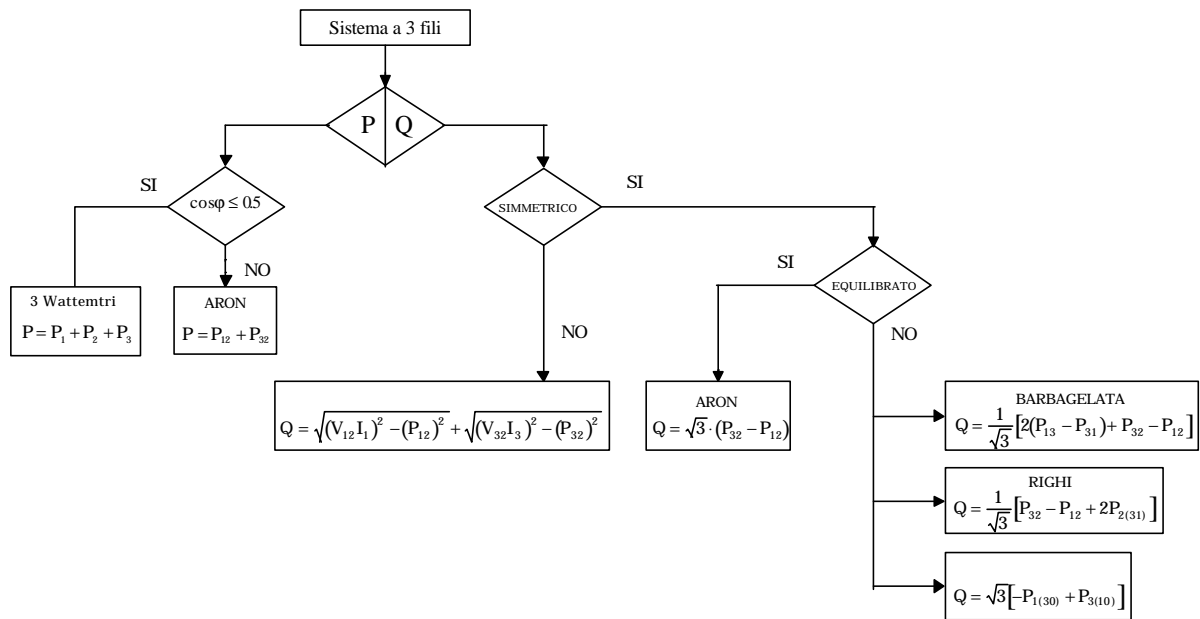


Fig. 23