INTEGRALE INDEFINITO

OBIETTIVI MINIMI:

- Saper definire l'integrale indefinito di una funzione.
- Conoscere le proprietà dell'integrale indefinito.
- Saper calcolare l'integrale indefinito di una funzione utilizzando i diversi metodi di integrazione.

DA RICORDARE

- La derivata di una funzione, quando esiste è **UNICA**.
- Una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a;b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a;b]$ e la sua derivata è $f(x)$.

  Quindi: se $F'(x)=f(x)$ allora $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.
- Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora lo sono anche tutte le funzioni del tipo

  $F(x)+C$ con C costante reale arbitraria.

  Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla, si ha:

  $$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x) \qquad \forall C \in \Re$$
- Se due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive della stessa funzione $f(x)$, allora le due funzioni differiscono per una costante.
- Se $f(x)$ è **continua** in un intervallo $[a;b]$ allora in tale intervallo ammette primitiva.

Definizione di integrale indefinito

Si definisce **integrale indefinito** della funzione $f(x)$, e si indica con $\int f(x)dx$, l'insieme di tutte le primitive $F(x)+C$ di $f(x)$ con C numero reale qualunque.

Nella scrittura $\int f(x)dx$ la funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e la variabile x **variabile d'integrazione**.

Teoremi degli integrali indefiniti

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
- $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
- $\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)]dx = k_1 \cdot \int f_1(x)dx + k_2 \cdot \int f_2(x)dx$

I teoremi sopra elencati permettono di affermare che l’integrale indefinito, come la derivata, è un **operatore lineare** e il procedimento di integrazione che utilizza tali teoremi è detto integrazione per **decomposizione** o per scomposizione.

Integrali immediati

Se è possibile determinare l’integrale indefinito di una funzione grazie alle sole regole di derivazione allora l’**integrale** è detto **immediato**.

Tabella degli integrali immediati delle funzioni elementari e loro generalizzazioni

Integrale immediato	Generalizzazione
$\int dx = x + C$	$\int f'(x)dx = f(x) + C$
$\int kdx = kx + C$	$\int k \cdot f'(x)dx = k \cdot f(x) + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
$\int senxdx = -\cos x + C$	$\int sen f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos xdx = senx + C$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = sen f(x) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)dx = tgf(x) + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \dfrac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)dx = arctg f(x) + C$

ESEMPI

Integrazioni immediate con utilizzo della regola di integrazione per decomposizione.

$$\int\left(3x^2+\frac{1}{x}-2e^x\right)dx=3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx-2\int e^xdx=3\frac{x^{2+1}}{2+1}+\log|x|-2e^x+C=x^3+\log|x|-2e^x+C$$

$$\int 2x\cdot senx^2dx=-\cos x^2+C$$

$$\int x\cdot senx^2dx=\frac{1}{2}\int 2x\cdot senx^2dx=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$$

$$\int\left(4\sqrt{x}+2x^4+1\right)dx=4\int x^{\frac{1}{2}}dx+2\int x^4dx+\int dx=4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2\frac{x^{4+1}}{4+1}+x+C=4\frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}}+2\frac{x^5}{5}+x+C=$$

$$=\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^5+x+C$$

$$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cos x\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int\cos xdx=3arctgx-\frac{1}{2}senx+C$$

$$\int tgxdx=\int\frac{senx}{\cos x}dx=-\int\frac{-senx}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C$$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Per integrare le funzioni razionali fratte si utilizza, in genere, il metodo di decomposizione che, come già visto, si basa sulla possibilità di decomporre la funzione integranda nella somma di funzioni.

Si debba integrare: $\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx$

a) Se grado di $P_1(x)$ $\geq$ grado di $P_2(x)$ si esegue la divisione tra i polinomi:

$$P_1(x)=Q(x)\cdot P_2(x)+R(x)\ \rightarrow\ \frac{P_1(x)}{P_2(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{P_2(x)}$$ con $Q(x)=quoziente$, $R(x)=resto$

b) Se grado di $P_1(x)$ < grado di $P_2(x)$ e $P_2(x)=ax^2+bx+c$ si calcola il Δ dell'equazione associata. Si presentano 3 casi:

1° CASO $\Delta>0$

Si fattorizza $P_2(x)$

$$P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

→

Si cercano due numeri A e B tali che

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right]$$

→

L'integrale di partenza si trasforma in

$$\frac{1}{a}\int \frac{A}{x - x_1}\,dx + \frac{1}{a}\int \frac{b}{x - x_2}\,dx$$

↓

L'integrale è la somma di logaritmi

$$\frac{A}{a}\log|x - x_1| + \frac{B}{a}\log|x - x_2| + C$$

2° CASO $\Delta = 0$

Si fattorizza $P_2(x)$

$$P_2(x) = a(x - x_1)^2$$

se $P_1(x)$ è di 1° grado

Si cercano due numeri A e B tali che

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}\right]$$

→

L'integrale di partenza si trasforma in

$$\frac{1}{a}\int \frac{A}{x - x_1}\,dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{(x - x_1)^2}\,dx$$

↓

L'integrale è la somma di un logaritmo e di una funzione fratta

$$\frac{A}{a}\ln|x - x_1| - \frac{B}{a(x - x_1)} + C$$

se $P_1(x)$ è di grado 0

L'integrale è quello immediato di una funzione fratta

$$-\frac{P_1(x)}{a(x - x_1)} + C$$

3° CASO $\Delta < 0$

$P_2(x)$ non è scomponibile

- Se $P_1(x)$ è di grado 0 si scrive il denominatore come somma di due quadrati ottenendo come integrale un arcotangente
- Se $P_1(x)$ è di 1° grado si scrive la frazione come somma di due frazioni, la prima delle quali sia la primitiva di un logaritmo e la seconda sia la primitiva di un arcotangente

ESEMPI

- $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \log|x+1| + C$

- $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$ <u>1°CASO</u> denominatore con $\Delta > 0$

Si scompone $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ e, grazie al principio di identità polinomiale si determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x(A+B)-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=1 \end{cases}$ Risolvendo il sistema otteniamo $\begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$ e l'integrale diventa:

$$\int \frac{-3}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx = -3\int \frac{1}{x-2}dx + 4\int \frac{1}{x-3}dx = -3\log|x-2| + 4\log|x-3| + C$$

- $\int \frac{3x-1}{4x^2+4x+1}dx$ <u>2°CASO</u> denominatore con $\Delta = 0$

Si scompone $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ e, grazie al principio di identità polinomiale, si determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{3x-1}{4x^2+4x+1}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}=\frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}=\frac{2Ax+A+B}{(2x+1)^2}$$

$\begin{cases} 2A=3 \\ A+B=-1 \end{cases}$ Risolvendo il sistema otteniamo $\begin{cases} A=\dfrac{3}{2} \\ B=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ e l'integrale diventa:

$$\frac{3}{2}\int\frac{1}{2x+1}dx-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(2x+1)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{2}{2x+1}dx-\frac{5}{4}\int\frac{2}{(2x+1)^2}dx=\frac{3}{4}\log|2x+1|+\frac{5}{4(2x+1)}+C$$

– $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+4x+7}dx$ <u>3°CASO</u> denominatore con $\Delta<0$

Si riscrive la frazione come somma di frazioni, in modo che una di esse abbia come numeratore la derivata del denominatore

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{2x+4-4+1}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx-\int\frac{3}{x^2+4x+7}dx$$

Il primo integrale è immediato, mentre nel secondo si scrive il denominatore come somma di due quadrati per poter integrare come arcotangente:

$x^2+4x+7=\left(x^2+4x+4\right)-4+7=(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$ l'integrale di partenza diventa:

$$\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx-3\int\frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx=\log\left(x^2+4x+7\right)-3\int\frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx=$$
$$=\log\left(x^2+4x+7\right)-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C=\log\left(x^2+4x+7\right)-\sqrt{3}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$$