Il caso in cui il denominatore è di grado superiore al secondo

Di fronte all'integrale di un rapporto tra due polinomi $\int \frac{M(x)}{N(x)}dx$ nel quale $\deg(N(x)) > 2$,

innanzitutto scomporremo in fattori il denominatore $N(x)$.

I fattori ottenuti potranno essere dei tipi seguenti:

- $ax+b$
- $(ax+b)^n,\ n>1$
- $ax^2+bx+c \quad con\ \Delta<0$ (trinomio di 2° grado non scomponibile utilizzando coefficienti reali)
- $(ax^2+bx+c)^n \quad con\ \Delta<0\,,\ n>1$

A questo punto, **cercheremo di decomporre la fraz.** $\frac{M(x)}{N(x)}$ **in una somma algebrica di fraz. più semplici.**

- Per ogni fattore $ax+b$ prepareremo una frazione della forma $\frac{A}{ax+b}$
- Per ogni fattore $(ax+b)^n$ prepareremo n frazioni: $\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots, \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
- Per ogni fattore ax^2+bx+c prepareremo una frazione della forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
- Per ogni fattore $(ax^2+bx+c)^n$

  prepareremo n frazioni: $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Infine **determineremo le costanti in gioco in modo che la somma algebrica di tali frazioni sia identicamente uguale alla frazione iniziale** $\frac{M(x)}{N(x)}$.

Per illustrare il procedimento, consideriamo l'integrale seguente: $\boxed{I=\int \frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1}dx}$

$$\frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1}=\frac{2x^3-4x^2+5x}{x^3(x-1)-(x-1)}=\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x^3-1)}=$$
$$=\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A(x^3-1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{Ax^3-A+Bx^2+Bx+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{(A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+(-A+B+D)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A \quad +C \quad = 2 \\ B \quad -2C \quad +D = -4 \\ B \quad +C \quad -2D = 5 \\ -A \quad +B \quad +D = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix}(1)+(2)+(3)+(4)\\(1)\\(3)-(2)\\(4)\end{matrix} \begin{cases} 3B=3 \\ A+C=2 \\ 3C-3D=9 \\ -A+B+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ -A+D=-1 \end{cases} \qquad \begin{matrix}\\ \\ \\ (2)+(4)\end{matrix}\begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ C+D=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix}\\ \\ (3)+(4)\\(4)-(3)\end{matrix}\begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ 2C=4 \\ 2D=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=-1 \end{cases}$$

E' dunque $\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\cancel{\frac{0}{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}$ e di conseguenza:

$$I=\int\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}\right]dx=\underbrace{\int\frac{1}{(x-1)^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\int(x-1)^{-2}dx=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{x-1}+c$$

$$I_2=\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1-2}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-2\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\ln\left|x^2+x+1\right|-2\int\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=\ln\left|x^2+x+1\right|-2\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\ln\left|x^2+x+1\right|-2\int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=\ln\left|x^2+x+1\right|-2\int\frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{8}{3}\int\frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx=\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{\cancel{8}^{4}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx=$$

$$=\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c$$

Finalmente avremo

$$\boxed{I=I_1+I_2=-\frac{1}{x-1}+\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c}$$