Il caso in cui il denominatore è di 2° grado

Allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado 0 o di grado 1:

$$\boxed{\int \frac{kx+h}{ax^2+bx+c}dx}$$

L'integrazione si effettua con 3 tecniche diverse, a seconda che, nel trinomio ax^2+bx+c, sia:

I. $\Delta > 0$

II. $\Delta = 0$

III. $\Delta < 0$

Primo sottocaso: $\boxed{\Delta > 0}$

E' noto che un trinomio di 2° grado con $\Delta > 0$ è scomponibile in due fattori di 1° grado, distinti fra loro.
La tecnica di integrazione consiste nell'**effettuare la scomposizione** e poi nello **spezzare la frazione in una somma algebrica di due frazioni col denominatore di primo grado**.

Esempio:

$$\int \frac{3x+4}{\underbrace{2x^2-x-1}_{\Delta=b^2-4ac=9>0}}dx$$

Consideriamo la funzione integranda, scomponiamone il denominatore, e scriviamola come somma algebrica di due frazioni aventi per denominatori i due fattori di primo grado ottenuti e per numeratori due costanti A, B da determinarsi in modo opportuno:

$$\frac{3x+4}{2x^2-x-1} = \frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Si tratta ora di stabilire per quali valori di A, B l'uguaglianza

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$$

è un'identità.

Dovrà essere, identicamente,

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{Ax-A+2Bx+B}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{(A+2B)x+(-A+B)}{(2x+1)(x-1)}$$

e a tale scopo A, B devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} A+2B=3 \\ -A+B \ =4 \end{cases}$$

Risolvendo, si ha

$$\begin{cases} A=-\dfrac{5}{3} \\ B=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

da cui

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{-\frac{5}{3}}{2x+1} + \frac{\frac{7}{3}}{x-1}$$

Il nostro integrale allora diventa:

$$\int \frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}dx = \int \left(\frac{-\frac{5}{3}}{2x+1} + \frac{\frac{7}{3}}{x-1} \right) dx =$$

$$= -\frac{5}{3}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x-1}dx = -\frac{5}{6}\int \frac{2}{2x+1}dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= -\frac{5}{6}\ln|2x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-1| + c$$

Secondo sottocaso: $\boxed{\Delta = 0}$

Un trinomio di 2° grado con $\Delta = 0$ è uguale ad un quadrato di binomio, eventualmente moltiplicato per una costante.
Ma aspettiamo un attimo, prima di effettuare la scomposizione:
la prima cosa da fare, infatti, è di **far comparire a numeratore la derivata del denominatore,** come illustrato dall'esempio che segue:

$$\int \frac{x+1}{\underbrace{4x^2-4x+1}_{\Delta=b^2-4ac=16-16=0}}dx$$

La derivata del denominatore $4x^2-4x+1$ è $8x-4$.
Innanzitutto, vogliamo far comparire a numeratore questa espressione.
Avremo:

$$\int\frac{x+1}{4x^2-4x+1}dx=\frac{1}{8}\int\frac{8x+8}{4x^2-4x+1}dx=\frac{1}{8}\int\frac{8x-4+12}{4x^2-4x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{8x-4}{4x^2-4x+1}+\frac{12}{4x^2-4x+1}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{8x-4}{4x^2-4x+1}dx+\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}}\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx=$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2-4x+1\right|+\frac{3}{2}\int(2x-1)^{-2}dx=$$
$$=\frac{1}{8}\ln(2x-1)^2+\frac{3}{4}\int 2(2x-1)^{-2}dx=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot 2\ln\left|2x-1\right|+\frac{3}{4}\frac{(2x-1)^{-2+1}}{-2+1}+c=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x-1\right|-\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}+c=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x-1\right|-\frac{3}{4(2x-1)}+c$$

Terzo sottocaso: $\boxed{\Delta<0}$

Di un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c con $\Delta<0$, noi sappiamo che:

- non è scomponibile in fattori
  (a meno di utilizzare coefficienti complessi: ma in questo contesto, non se ne parla neppure!)
- si può scrivere come $a\left[(x+k)^2+p\right]$, essendo $p>0$.

La tecnica di integrazione, in questo caso, consiste nel **ricondursi alla derivata di un arc tg**, come illustrato dall'esempio che segue.
Anche qui, come nel sottocaso precedente (quello del $\Delta=0$) occorre **innanzitutto far comparire a numeratore la derivata del denominatore**.

$$\int\frac{x-1}{\underbrace{x^2-6x+11}_{\Delta=b^2-4ac=36-44<0}}dx$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-6x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-6x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6+4}{x^2-6x+11}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-6}{x^2-6x+11}+\frac{4}{x^2-6x+11}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx+\frac{1}{2}\int\frac{4}{x^2-6x+11}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{I_1}+2\underbrace{\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{I_2}$$

Si tratta ora di risolvere i due integrali I_1, I_2:
il primo porta immediatamente a un logaritmo, il secondo va ricondotto ad un arc tg.
Dunque:

$$I_1=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx=\ln(x^2-6x+11)+c$$

(abbiamo omesso il valore assoluto perché, com'è noto, un trinomio di 2° grado con $\Delta<0$ e 1° coefficiente positivo è sempre >0, per ogni valore della variabile)

$$I_2=\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx=\int\frac{1}{x^2-6x+9+2}dx=\int\frac{1}{2+(x-3)^2}dx=$$
$$=\int\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+(x-3)^2}{2}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+(x-3)^2}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\frac{(x-3)^2}{2}}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx\overset{NOTA}{=}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c$$

NOTA: stiamo cercando di portarci nelle condizioni di poter applicare la formula di integrazione
$$\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\,f(x)+c.$$
La funzione che nella formula è indicata con f(x) è per noi $\frac{x-3}{\sqrt{2}}$.
Ed è
$$D\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)=D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

In definitiva avremo

$$\boxed{\int\frac{x-1}{x^2-6x+11}dx}=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{I_1}+2\underbrace{\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{I_2}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+11)+2\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c=\boxed{\ln\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{2}\,arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c}$$