INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE
(=RAPPORTI DI POLINOMI)

Studieremo ora tecniche specifiche per gli integrali della forma

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx,$$

essendo A(x) e B(x) due polinomi.
E' lecito supporre che il numeratore A(x) sia di grado inferiore rispetto al denominatore B(x):
infatti, se così non fosse, ci si potrebbe pur sempre riportare a questo caso, sostanzialmente tramite una divisione fra polinomi, come mostra l'esempio seguente:

$\int \frac{x^3-x+1}{x+2}dx$. Poiché il numeratore **non** è di grado inferiore rispetto al denominatore, svolgiamo la divisione:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\multicolumn{4}{r|}{\overbrace{x^3 \qquad -x+1}^{A(x)}} & \overbrace{x+2}^{B(x)} \\
-x^3 & -2x^2 & & & \underbrace{x^2-2x+3}_{Q(x)} \\ \cline{1-4}
/ & -2x^2 & -x & +1 & \\
 & 2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & / & 3x & +1 & \\
 & & -3x & -6 & \\ \cline{3-4}
 & & / & \underbrace{-5}_{R(x)} &
\end{array}
$$

Ora abbiamo a disposizione l'identità $x^3-x+1=(x^2-2x+3)(x+2)-5$
e ciò fa sì che il nostro integrale possa essere trascritto come:

$$\int \frac{x^3-x+1}{x+2}dx = \int \frac{(x^2-2x+3)(x+2)-5}{x+2}dx =$$
$$= \int \left[\frac{(x^2-2x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} - \frac{5}{x+2} \right] dx = \int \left(x^2-2x+3-\frac{5}{x+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 5\ln|x+2| + c$$

In generale, di fronte ad un integrale di funzione razionale fratta $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$ in cui sia $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$, si svolgerà la divisione $A(x):B(x)$, poi si utilizzerà l'identità

$$\textit{dividendo} = \textit{quoziente} \cdot \textit{divisore} + \textit{resto}$$
$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

che permetterà di scrivere la funzione integranda sotto una forma diversa:

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}dx} = \int \frac{Q(x)\cdot B(x) + R(x)}{B(x)}dx = \int \left[\frac{Q(x)\cdot \cancel{B(x)}}{\cancel{B(x)}} + \frac{R(x)}{B(x)} \right] dx = \boxed{\int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}dx}$$

In tal modo ci si ricondurrà all'integrazione del polinomio Q(x) (immediata) e della funzione razionale fratta **R(x)/B(x)**.
Ma **in quest'ultima il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore**, perché in una divisione di polinomi il polinomio resto ha sempre grado minore rispetto al polinomio divisore.

Il caso in cui il denominatore è di 1° grado

Se il polinomio a denominatore è di 1° grado, allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado zero, cioè sia una costante.
Dunque il nostro integrale sarà della forma

$$\boxed{\int \frac{k}{ax+b}dx}$$

e procederemo come nell'esempio che segue:

$$\int \frac{7}{3x-8}dx = 7\int \frac{1}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + c \quad \text{(NOTA)}$$

In generale:

$$\int \frac{k}{ax+b}dx = k\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$$

NOTA

Per la precisione, sarebbe

$$\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + c\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c};$$

d'altra parte, poiché c indica una costante arbitraria, anche $\frac{7}{3}c$ sarà una costante arbitraria; e questa costante arbitraria potrà essere indicata ancora con c.

Volendo effettuare tutti i passaggi, con perfetta salvaguardia della correttezza formale, si potrà scrivere:

$$\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + \boxed{c_1}\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c_1} = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{c}$$